

**Steffen Schwarzer**

**Optimierung der Auslegung und des  
Betriebsverhaltens von hohlradgetriebenen  
Innenzahnradpumpen**

# Kraftfahrzeugtechnische Berichte

Herausgegeben von Prof. Dr. Klaus Augsburg  
Fachgebiet Kraftfahrzeugtechnik an der  
TU Ilmenau

**Band 6**

# **Optimierung der Auslegung und des Betriebsverhaltens von hohlradgetriebenen Innenzahnradpumpen**

Steffen Schwarzer



Universitätsverlag Ilmenau  
2013

# Impressum

## **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Angaben sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Diese Arbeit hat der Fakultät für Maschinenbau der Technischen Universität Ilmenau als Dissertation vorgelegen.

Tag der Einreichung: 4. Januar 2013

1. Gutachter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Klaus Augsburg  
(Technische Universität Ilmenau)

2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Tillmann Körner  
(Hochschule Aalen - Technik und Wirtschaft)

3. Gutachter: Dr.-Ing. Johannes Bruckner  
(Voith Turbo GmbH, Heidenheim)

Tag der Verteidigung: 24. Juli 2013

Technische Universität Ilmenau/Universitätsbibliothek

### **Universitätsverlag Ilmenau**

Postfach 10 05 65

98684 Ilmenau

[www.tu-ilmenau.de/universitaetsverlag](http://www.tu-ilmenau.de/universitaetsverlag)

### **Herstellung und Auslieferung**

Verlagshaus Monsenstein und Vannerdat OHG

Am Hawerkamp 31

48155 Münster

[www.mv-verlag.de](http://www.mv-verlag.de)

**ISSN** 1865-0880 (Druckausgabe)

**ISBN** 978-3-86360-071-6 (Druckausgabe)

**URN** urn:nbn:de:gbv:ilm1-2013000402

---

Titelfoto: Veit Henkel | Fakultät für Maschinenbau, TU Ilmenau



## Kurzfassung

Zahnradpumpen werden nach wie vor sehr verbreitet in der Antriebstechnik sowie in Anlagensystemen zur hydraulischen Kraftübertragung verwendet. Für die industrielle Anwendbarkeit der Pumpen sind vor allem niedrige Geräuschemissionen, niedrige Herstellungskosten und hohe Leistungen zu vereinen. Werden Innenzahnradpumpen mit Außenzahnradpumpen verglichen, zeichnen sich Innenzahnradpumpen durch niedrigere Geräuschemissionen aus, sind jedoch wegen ihrer höheren Herstellungskosten weniger verbreitet und erforscht.

Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag zur Optimierung der Auslegung und des Betriebsverhaltens von hohlradgetriebenen Innenzahnradpumpen. Ziel ist es, allgemein gültige Auslegungsregeln für industriell umsetzbare Innenzahnradpumpen zu entwickeln. Die erarbeiteten Gestaltungskriterien führen vornehmlich zu einer Minderung von Druckpulsationen und Druckwechselkräften. Um den Druck im Druckaufbauvorgang zu reduzieren, wird mit einem neuen geometrischen Verfahren die Pumpenverzahnungsgeometrie dahingehend ausgelegt, große Druckerhöhungen in der Zahnkammer zu vermeiden. Die im Gehäuse platzierten Stege werden über das Berechnungsverfahren so angepasst, dass eine weitere Reduzierung des Spitzen-drucks erfolgt. Für die Ermittlung des Druckgradienten im Druckaufbauvorgang wird ein analytisches Verfahren erstellt, das es ermöglicht den Druck in der Zahnkammer während einer Umdrehung zu berechnen. Damit können im Bereich der Sichel über Nutungen gezielte Leckströme erzeugt werden, um den Druckgradienten zu senken. Für die Verifikation des Auslegungsmodells wird der Druckverlauf in der Zahnkammer mit einem im Zahnfuß eingebauten Miniaturdruckaufnehmer gemessen.

Durch das Antriebskonzept können bei hohlradgetriebenen Innenzahnradpumpen aufgrund exzentrisch angreifender Kräfte Verkipnungen an den Pumpenrädern auftreten. Die Verkipnungen werden unter dynamischen Bedingungen mit zwei Wirbelstromsensoren überprüft. Es wird ein Kennfeld erarbeitet, das es dem Konstrukteur ermöglicht, Verkipnungen bereits unter Beachtung des Wirkungsgrads im Auslegungsstadium zu vermindern.

Aus den erhaltenen Erkenntnissen wird das Programm HGP-SIM zur Auslegung von hohlradgetriebenen Innenzahnradpumpen mit optimiertem Betriebsverhalten erstellt. Über die Eingabe von Vorgabedaten werden in Unterprogrammen optimierte Auslegungsgeometrien für die einzelnen Teilbereiche ausgegeben.

Nach den erarbeiteten Regeln ausgelegte hohlradgetriebene Innenzahnradpumpen zeichnen sich bei ähnlichen Herstellungskosten durch niedrigere Schallemissionen wie Außenzahnradpumpen aus. Dadurch wird das Potenzial von hohlradgetriebenen Innenzahnradpumpen zur industriellen Anwendung und Umsetzung bewiesen.



---

## Abstract

Gear pumps are still widely used for the hydraulic power transmission in power transfer units as well as mechanics systems. For the industrial application of the gear pumps, in particular a low noise emission, low manufacturing costs and a high performance are required. In this respect, comparing the internal gear pumps with external gear pumps, the former are characterized by lower noise emission, nevertheless due to higher manufacturing costs are less widespread and investigated.

The presented study is concerned with an optimization of the dimensioning and the operating behavior of the hollow wheel actuated internal gear pumps. The goal is to develop general rules for dimensioning of industrially applicable gear pumps. The new dimensioning criteria lead primarily to a reduction of pressure ripple and forces arising from pressure variation. By applying the new geometrical method, the gear geometry is dimensioned to avoid the pressure rise in the tooth chamber and consequently to reduce the pressure drop in a tooth mesh. A further reduction of pressure overshoots can be accomplished through the adaption of the division bars placed in pump housing with the help of the new calculation method. Determination of the pressure gradient in the pressure rise sequence is realized by applying of an analytical method which permits the calculation of the pressure in the tooth chamber during the rotation of the gear. Subsequently, by inserting the grooves in the area of the sickle, it is possible to produce a leakage flow in order to reduce the pressure gradient. For the verification of the dimensioning model, the pressure profile in the tooth chamber with the miniature pressure sensor located in the tooth root is measured.

For the hollow wheel actuated internal gear pumps due to the acting eccentric forces a dumping of the pump gears can occur. The occurrence of the dumping under dynamic conditions is monitored utilizing an eddy current sensor. Finally, a characteristic diagram is developed, which under consideration of the degree of efficiency already in the dimensioning stage enables a reduction of dumping.

Based on the arisen results, a Software HGP-SIM for the dimensioning of the hollow wheel actuated internal gear pumps with optimized operating behavior is created. The optimized geometries of the individual pump elements are calculated by entering the default data as an input for the sequence of subroutines.

The hollow wheel actuated internal gear pumps dimensioned according to the developed rules are characterized by comparable manufacturing costs and lower level of noise than the external gear pumps. Thus, the potential of the hollow wheel actuated internal gear pumps for industrial implementation and application is proven.



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Hochschule Aalen in Kooperation mit der Voith Turbo GmbH Heidenheim und der Technischen Universität Ilmenau. An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich dabei unterstützt haben.

Besonders danke ich Herrn Professor Dr.-Ing. Klaus Augsburg von der Technischen Universität Ilmenau für die Übernahme der Betreuung der Arbeit. Die konstruktive Zusammenarbeit gab trotz der räumlichen Distanz immer viele Ideen und Anregungen, die die Realisierung der Arbeit ermöglicht haben.

Herr Professor Dr.-Ing. Tillmann Körner von der Hochschule Aalen hat über die Stiftungsprofessur die Grundlage für das Kooperationsprojekt geschaffen. Für die Förderung, die Zusammenarbeit und die Betreuung vor allem bei der Erstellung der schriftlichen Arbeit möchte ich mich ganz herzlich bedanken.

Den Mitarbeitern der Voith Turbo GmbH, insbesondere dem Leiter der Technik Serie, Herr Dr.-Ing. Johannes Bruckner danke ich für die Unterstützung des Projekts, die Übernahme des Mitberichts und die vielen fachlichen Diskussionen bei den Lenkungsausschusssitzungen.

Weiteren Dank möchte ich an meine ehemaligen Kollegen der Hochschule Aalen richten. An Tonino Gullotta - Toni, Deine Bereitschaft, Hilfe und Anregungen waren stets eine Motivation, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben. Meinem Kollegen Harald Albrecht danke ich für die gute Zusammenarbeit und das gute Arbeitsklima. Dem Meister des Prototypenlabors Günter Link danke ich für seinen unermüdlichen Einsatz und die schnelle Umsetzung der geplanten Prototypen.

Allen betreuten Studenten von Studien- oder Abschlussarbeiten bin ich sehr dankbar für die zahlreichen Messungen und zeitintensiven Tätigkeiten. Insbesondere ist hierbei die Mitarbeit von Dennis Pfeiffer und Thomas Glaser zu erwähnen, die keine Langeweile aufkommen ließen.

Schließlich danke ich ganz herzlich meinen Eltern für Ihre persönliche Unterstützung. Sie haben mir diesen Weg und Werdegang erst ermöglicht. Dorota, Dir danke ich von ganzem Herzen, dass Du immer an meiner Seite warst und mich vor allem in der Schlussphase ermutigt und unterstützt hast.



## Formelzeichen

<b><u>Zeichen</u></b>	<b><u>Einheit</u></b>	<b><u>Benennung</u></b>
<u>Lateinische Buchstaben</u>		
$a$	mm	Achsabstand
$a_H$	mm	Breite der Dreiecknut
$a_d$	mm	Nullachsabstand
$b$	mm	Breite
$b_H$	mm	Kopfspaltbreite
$b_S$	mm	Breite des Zahnradseitenspalts
$d_G$	mm	Gleitlagerdurchmesser
$e_b$	mm	Zahnlückenweite am Grundkreis
$e_{fF}$	mm	Zahnlückenweite am Fußformkreis
$f_a$	mm	Abstand vom Wälzpunkt C
$f_D$	$s^{-1}$	Frequenz des Förderdrucks
$f_n$	$s^{-1}$	Frequenz durch die Anregung der Antriebskette
$g_a$	mm	Kopfeingriffsstrecke
$g_f$	mm	Fußeingriffsstrecke
$j_t$	mm	Flankenspiel
$h$	mm	Höhe des induktiven Spaltelements
$h_{aP}$		Kopfhöhenfaktor
$h_{DH}$	mm	Breite der Dreiecknut
$h_{fP}$		Fußhöhenfaktor
$h_{KH}$	mm	Höhe des Kopfspalts
$h_{SH}$	mm	Höhe des Zahnseitenspalts
$m$	mm	Modul
$\dot{m}$	$kg \cdot s^{-1}$	Massenstrom
$n$	$min^{-1}$	Drehzahl
$p$	bar	Druck
$p_D$	bar	Förderdruck
$p_Q$	bar	Maximaler Druck in der Zahnlücke
$p_S$	bar	Saugdruck
$p_U$	bar	Unterdruck
$p_V$	bar	Druck im Eingriffsbereich
$r_a$	mm	Kopfkreisradius
$r_{au\beta en}$	mm	Zahnradaußenradius
$r_b$	mm	Grundkreisradius
$r_f$	mm	Fußkreisradius
$r_{fF}$	mm	Fußformkreisradius

---

$r_{fa}$	mm	Kopfspaltlänge
$r_W$	mm	Wälzkreisradius
$t_e$	mm	Stirneingriffsteilung
$s_a$	mm	Zahndicke am Kopfkreis
$s_f$	mm	Zahndicke am Fußkreis
$s(z)$	mm	Bogenlänge der Zahndicke in Abhängigkeit der z-Richtung
$s_0$	mm	Verschiebung des Spalts
$v$	$m \cdot s^{-1}$	Geschwindigkeit
$x$		Profilverschiebungsfaktor
$z$		Zähnezahl

$A_{FI}$	$mm^2$	Fläche des induktiven Elements
$A_K$	$mm^2$	Fläche im Verzahnungseingriff
$F$	N	Kraft
$F_A$	N	Antriebskraft am Hohlrad
$F_D$	N	Axiale Kraft infolge des Druckfeldes auf das Hohlrad
$F_E$	N	Eingriffskraft am Hohlrad und am Ritzel
$F_{ZK}$	N	Kraft aus dem Druckverlauf der Zahnkammer
$G$	$\Omega^{-1}$	Leitwert, Kehrwert des Widerstands
$I$	A	Strom
$L_p(A)$	dB	A-bewerteter Schalldruckpegel
$L_H$	mm	Tiefe der Axialnut
$Q$	$l \cdot min^{-1}$	Volumenstrom
$R_E$	$\Omega$	Elektrischer Widerstand
$R_H$	$N \cdot s \cdot m^{-5}$	Hydraulischer Widerstand
$S_D$	mm	Stegmaß auf der Druckseite
$S_S$	mm	Stegmaß auf der Saugseite
$T$	$^{\circ}C$	Temperatur
$T_A$	Nm	Drehmoment
$U$	V	Spannung
$V_K$	$mm^3$	Volumen im Verzahnungseingriff
$\dot{V}$	$l \cdot min^{-1}$	Volumenstrom

### Griechische Buchstaben

$\alpha$	$^{\circ}; rad$	Eingriffswinkel
$\alpha_H$	$rad \cdot s^{-2}$	Winkelbeschleunigung des Hohlrads
$\alpha_W$	$^{\circ}; rad$	Betriebseingriffswinkel
$\gamma$	$^{\circ}; rad$	Laufwinkel, definiert für eine Hohlradlücke
$\gamma_{gaH}$	$^{\circ}; rad$	Winkel des Kopfeingriffsbereichs für das Hohlrad
$\gamma_{gaR}$	$^{\circ}; rad$	Winkel des Kopfeingriffsbereich für das Ritzel



$\delta$		Ungleichförmigkeitsgrad
$\varepsilon_A$	°; rad	Winkel zwischen Steg und Antriebseingriff
$\varepsilon_{AD}$	°; rad	Winkel zwischen Antriebseingriff und Drucktasche
$\zeta_{1-4}$	mm	Abstände der Dichtpunkte zum Hohlradmittelpunkt
$\eta$	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$	Dynamische Viskosität
$\eta_{1-4}$	mm	Abstände der Dichtpunkte zum Ritzelmittelpunkt
$\eta_{\text{mech}}$		Mechanischer Wirkungsgrad
$\eta_{\text{nutz}}$		Nutzwirkungsgrad
$\eta_P$		Pumpengesamtwirkungsgrad
$\eta_{\text{vol}}$		Volumetrischer Wirkungsgrad
$\kappa$		Adiabatexponent
$\Theta_H$	°; rad	Winkel der Kopfkreissschnittpunkte
$\mu$	$\text{N}\cdot\text{A}^{-2}$	Permeabilitätszahl
$\nu$	°; rad	Verdrehwinkel der Evolvente
$\xi$	°; rad	Evolventenerzeugungswinkel
$\rho$	$\text{kg}\cdot\text{m}^3$	Dichte
$\tau$	$\text{N}\cdot\text{mm}^{-2}$	Schubspannung
$\varphi$	°; rad	Winkel
$\Psi_b$	°; rad	Grundkreisdickenhalbwinkel
$\omega$	$\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$	Winkelgeschwindigkeit

### Indizes

0	Startwert
aus	Ausgehender Wert
ax	Axialkomponente
A	Antriebsrad
eff	Effektivwert
ein	Eingehender Wert
geo	geometrisch
h	hydraulisch
H	Hohlrad
l	links
min	Minimalwert
mittel	Mittelwert
max	Maximalwert
r	rechts
R	Ritzel

### Bezeichnungen und Abkürzungen

A	Eingriffsbeginn
---	-----------------

B	Beginn des Einzeleingriffs
AZP	Außenzahnradpumpe
C	Wälzpunkt
CFD	Computational Fluid Dynamics
D	Ende des Einzeleingriffs
DAB	Druckaufbauzone
E	Eingriffsende
EB	Eingriffsbereich
EV	Fläche unterhalb der Evolventenkurve
Evo	Evolvente
inv	Involutfunktion
IZP	Innenzahnradpumpe
K	Zahnkammer
M	Mittelpunkt
SP	Kopfkreisschnittpunkt
UB	Unterdruckbereich
UZP	Universal-Zahnradpumpen-Prüfstand
Y	Koordinatenpunkt

---

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung und Motivation .....</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Stand des Wissens .....</b>	<b>3</b>
2.1	Ungleichförmigkeitsgrad .....	3
2.2	Ursachen der Geräuscentwicklung .....	4
2.3	Messung des Druckverlaufs in der Zahnkammer.....	9
2.4	Optimierung von Pumpen mit numerischen Methoden .....	10
2.5	Fazit .....	11
<b>3</b>	<b>Problemstellung und Zielsetzung.....</b>	<b>13</b>
3.1	Angewandtes Antriebskonzept .....	14
3.2	Analytische Lösungen zur Optimierung der Pumpe.....	16
<b>4</b>	<b>Grundlagen für Verzahnungen und Pumpenmerkmale .....</b>	<b>19</b>
4.1	Verzahnungsgrundlagen für Evolventenverzahnungen .....	19
4.1.1	Verzahnung mit Flankenspiel.....	21
4.1.2	Verzahnung ohne Flankenspiel.....	22
4.1.3	Definitionen für das Koordinatensystem und die Verzahnungen.....	23
4.2	Wirkungsgrade.....	25
4.3	Geometrische Gestaltungsgrenzen der Innenzahnradpumpe.....	28
4.4	Strömungsgleichungen .....	29
4.4.1	Grundgleichungen.....	29
4.4.2	Strömungen in Innenzahnradpumpen .....	30
<b>5</b>	<b>Versuchsausstattung .....</b>	<b>31</b>
5.1	Prüfstand .....	31
5.1.1	Aufbau und Leistungsdaten .....	31
5.2	Messtechnik.....	33
5.2.1	Drucksensoren in der Pumpe.....	33
5.3	Auswertungsdarstellungen.....	35
5.4	Versuchsprogramm.....	36
<b>6</b>	<b>Optimierung des dichtenden Eingriffs .....</b>	<b>37</b>
6.1	Grundlagen .....	37
6.2	Volumenverlauf für Verzahnungen mit Flankenspiel.....	41
6.3	Volumenverlauf für Verzahnungen ohne Flankenspiel.....	43
6.4	Erkenntnisse und Folgen für die Steggestaltung .....	47
6.5	Parameterstudie für die Pumpenverzahnungsauslegung .....	51
6.6	Verifizierung der Verzahnungs- und Stegoptimierung .....	59
6.6.1	Einflüsse zwischen den Steggeometrien.....	60

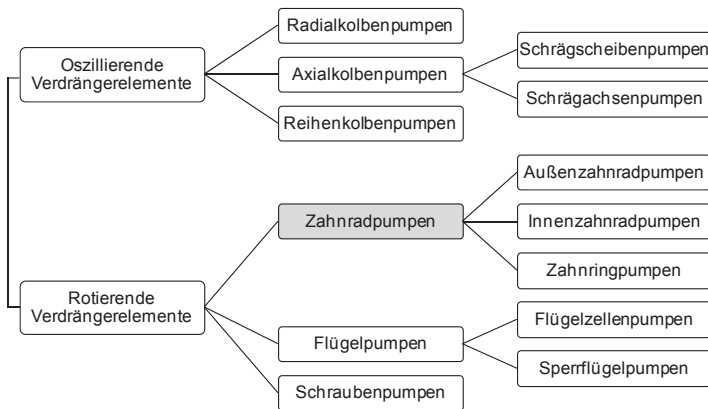
---

6.6.2	Einflüsse der Verzahnungsarten .....	61
6.6.3	Einflüsse der Viskosität .....	62
6.6.4	Einflüsse der Entlastungsnuten bei Verzahnungen mit Flankenspiel	63
6.6.5	Auswertungsüberblick .....	64
<b>7</b>	<b>Druckverlauf in der Zahnkammer .....</b>	<b>67</b>
7.1	Berechnungsmodell .....	67
7.1.1	Druckaufbaubereich .....	70
7.1.2	Verdrängungsbereich .....	79
7.1.3	Zahneingriffsbereich .....	89
7.2	Verifizierung des Berechnungsmodells .....	93
7.2.1	Verifizierung der berechneten und gemessenen Druckverläufe in der Zahnkammer .....	93
7.2.2	Einfluss der Sichel­länge und -form auf den Druckaufbaubereich ....	95
7.2.3	Einfluss der Sichel­geometrie auf die Förderdruckpulsation .....	101
<b>8</b>	<b>Druckübergabe und Spaltänderung .....</b>	<b>105</b>
8.1	Kräftewirkung am Hohlrad .....	105
8.2	Versuche .....	106
8.2.1	Versuchsaufbau und Messtechnik .....	106
8.2.2	Erweitertes Versuchsprogramm .....	109
8.2.3	Versuchsparameter .....	110
8.3	Auswertungen der Spaltmessungen .....	113
8.3.1	Einfluss von Drehzahl, Förderdruck und Temperatur auf die Hohlradverkip­pung und den Wirkungsgrad .....	113
8.3.2	Axiale Spalt­maßänderung unter dem Einfluss sich dynamisch verändernder Betriebsbedingungen .....	115
8.3.3	Einfluss des Winkels $\varepsilon_A$ und $\varepsilon_{AD}$ unter dynamischen Bedingungen	117
8.3.4	Druckausgleich durch die Kompensationstasche .....	118
8.4	Entwicklung des axialen Spalts unter dynamischen Bedingungen .....	121
8.5	Korrelation der Spaltmessungen mit dem Berechnungsmodell des Druckverlaufs in der Zahnkammer .....	122
8.6	Fazit .....	123
<b>9</b>	<b>Auslegungsmodell für hohlradgetriebene Innenzahnradpumpen .....</b>	<b>125</b>
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>131</b>
<b>11</b>	<b>Literatur .....</b>	<b>137</b>
<b>Anhang</b>	<b>.....</b>	<b>141</b>

# 1 Einführung und Motivation

In der Antriebstechnik und im Anlagenbau finden hydraulische Leistungsübertragungen in Verbindung mit Verdrängerpumpen große Verbreitung. Verdrängerpumpen werden beispielsweise für das Wandeln der hydraulischen Energie, als Füllpumpen, als Schmier- und Kühlpumpen oder zur Aufrechterhaltung des Regelschaltendrucks in den Steuerungssystemen eingesetzt. Das allgemeine Streben im gleichen Bauraum größere Leistung zu erzielen, zieht höhere Anforderungen in den Anlagensystemen nach sich. Dies wirkt sich bei den Verdrängerpumpen besonders auf das Drehzahlniveau und das Hubvolumen aus. Deshalb wird eine geeignete Anpassung an den vorgegeben Bauraum erforderlich.

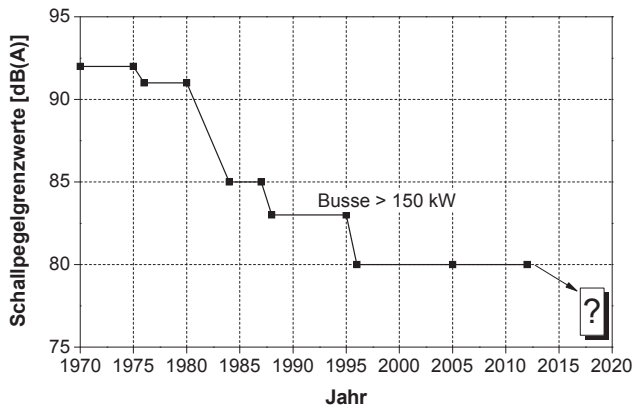
Die Verdrängerpumpen gliedern sich in zwei Funktionsprinzipien, mit oszillierenden und rotierenden Verdrängerelementen, nach Bild 1.1 auf. Dabei werden Zahnradpumpen in der Mobil- und Anlagenhydraulik bevorzugt [1]. Ihre Vorteile gegenüber anderen Pumpenbauarten sind vor allem der einfache Aufbau und die niedrigen Fertigungskosten. Größere Verbreitung finden die Außenzahnradpumpen gegenüber den Innenzahnradpumpen, da sie bei gleicher Leistung günstiger zu fertigen sind. Jedoch haben Außenzahnradpumpen den Nachteil eines höheren Geräuschniveaus bei gleichen Betriebsbedingungen.



**Bild 1.1:** Verdrängerpumpen und ihre Bauarten nach dem Funktionsprinzip eingeteilt

Die Druckpulsation infolge der Volumenstrompulsation, das Eigengeräusch durch Druckwechselkräfte sowie die Frequenz von Zahnradpumpen sind neben den mechanischen Kräften hauptsächlich verantwortlich für die Geräusentstehung und Geräusentwicklung in hydraulischen Anlagen. Die Absenkung von zulässigen Schallpegelgrenzwerten (Bild 1.2, frei nach [2]) für Umgebungsgeräusche und die

allgemeine Sensibilisierung gegenüber Lärm im alltäglichen Betrieb führen dazu, dass gerade für die Hydraulikanlagen neue Wege gesucht werden müssen, um eine Geräuschreduktion zu erzielen. Es gibt viele Betrachtungsweisen, die an der Reduzierung der Volumenstrompulsation ansetzen. Dabei zeigt die Entwicklungspraxis jedoch, dass die Problemlösungen weitestgehend intuitiv und auf versuchstechnischem Wege erfolgen [3].



**Bild 1.2:** Zeitliche Entwicklung der Schallpegelgrenzwerte für die Zulassung von Bussen > 150 kW in der EU

Es liegt nahe, aus systemtechnischen Gründen die geräuscharmeren Innenzahnradpumpen den Außenzahnradpumpen vorzuziehen, wenn diese mit geringerem oder ähnlichem Kostenniveau herstellbar wären. Dies kann nur über eine Umstellung der konservativen Fertigungsverfahren oder durch eine revolutionäre Änderung des Antriebskonzepts verbunden mit einer starken Bauteilereduzierung erfolgen. Dies gilt insbesondere für Pumpen im Niederdruckbereich (< 20 bar), die als Nebenaggregate verwendet werden. Der Wirkungsgrad darf bei Optimierungen hinsichtlich des Geräuschverhaltens jedoch nicht außer Acht gelassen werden.

Die Motivation liegt darin, einen neuen Grundgedanken zu Innenzahnradpumpen wissenschaftlich aufzuarbeiten, der das Potenzial von Geräusch, Herstellungskosten, Bauraum und die klassischen funktionalen Pumpenanforderungen erfüllen kann. Um versuchstechnische Verifikationen einzuschränken oder zu vermeiden, ist es daher notwendig, bereits in der Auslegungsphase Maßnahmen zu treffen, die auf die Optimierungen des Geräuschverhaltens, der Herstellungskosten und des Bauraums bei gleichzeitiger Einhaltung der Anforderungsgrenzen und erforderlichen Wirkungsgrade abzielen.

## 2 Stand des Wissens

Die Zahnradpumpe ist Gegenstand zahlreicher theoretischer und experimenteller Untersuchungen. Vor allem werden in diesen Arbeiten die Außenzahnradpumpen genauer untersucht. Das größte Augenmerk liegt auf den Erklärungen zur Schallentstehung und deren Vermeidung über geometrische Maßnahmen an den Pumpen. Die Motivation zur Geräuschreduzierung in der Stationärhydraulik sowie in der Mobilhydraulik basiert auf der Leistungssteigerung der Anlagen und Anlagensysteme. Diese soll ohne eine Zunahme oder gar mit einer Senkung der Schallemissionen erfolgen. Niedrigere Schallemissionen bedeuten gleichzeitig eine Einsparung an eingebrachter Energie in das System. Zunächst soll der Stand des Wissens über Literaturrecherchen nach vier Themenschwerpunkten zu Zahnradpumpen dargelegt werden. Zuerst wird auf den Ungleichförmigkeitsgrad eingegangen. Es schließt sich eine Betrachtung zur Ursache der Geräuschentwicklung an der Anlage infolge der Druckpulsationen und der Druckwechselkräfte in der Pumpe an. Als Folge davon werden über Literaturnennungen Geräuschverbesserungen über eine Minimierung der Druckwechselvorgänge aufgezeigt. Diese Vorgänge sind nur mit entsprechender Messtechnik wissenschaftlich erfassbar, wie in dieser Betrachtung aufgeführt wird. Abschließend werden die Optimierungen der Pumpen bezüglich der Druckvorgänge über numerische Methoden wie CFD-Simulationen in jüngster Zeit aufgezeigt.

### 2.1 Ungleichförmigkeitsgrad

Der Ungleichförmigkeitsgrad von Zahnradpumpen ist ein Maß über die aus der geometrischen Ungleichmäßigkeit der Förderung resultierenden Volumenstromschwankungen.

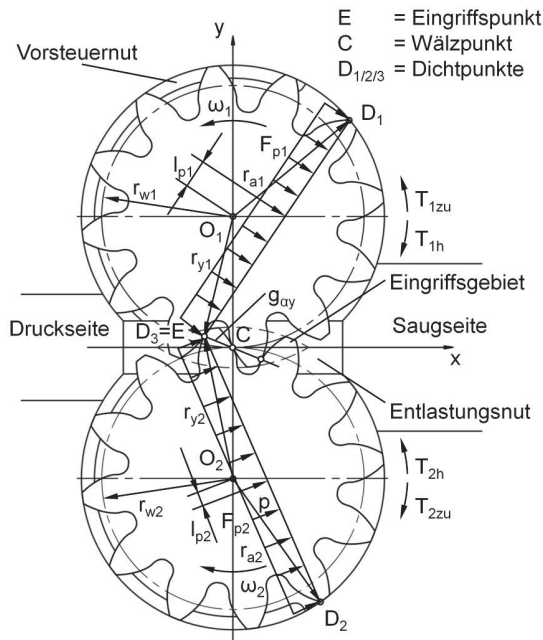
Molly [4] und Gutbrod [5] leiten vor allem die theoretischen Grundlagen für den diskontinuierlichen Fördervorgang her. Daraus resultiert der Ungleichförmigkeitsgrad  $\delta$  nach Gleichung (2.1) [6]. Über diesen Ungleichförmigkeitsgrad werden die verschiedenen Pumpentypen miteinander verglichen. Er gilt als ein Maß für die Pulsationsintensität [5]. Nach Link und Wang [7] ist eine Beurteilung über den Vergleich von Pumpen verschiedener Baugrößen nur mit dem Ungleichförmigkeitsgrad möglich. Gösele [6] vergleicht für verschiedene Pumpentypen die theoretischen und praktisch ermittelten Ungleichförmigkeitsgrade. Für Außenzahnradpumpen stimmen Rechnung und Messung gut überein.

$$\delta = \frac{Q_{\max} - Q_{\min}}{Q_{\text{mittel}}} \quad (2.1)$$

Der mittlere ( $Q_{\text{mittel}}$ ), maximale ( $Q_{\max}$ ) und minimale ( $Q_{\min}$ ) Volumenstrom wird dabei aus dem Energieansatz ermittelt [8-12]. Die hydraulischen Momente  $T_{1h}$  und  $T_{2h}$ , die durch die Kraft infolge des Druck auf die Flächen zwischen den Dichtpunkten  $D_1$  und

$D_3$  sowie  $D_2$  und  $D_3$  multipliziert mit der Zahnradbreite entstehen, werden dabei ins Gleichgewicht mit den mechanischen Antriebsmomenten  $T_{1zu}$  und  $T_{2zu}$  gesetzt (Bild 2.1).

Das gleiche Ergebnis erhalten Molly [4], Hagen [13] und Richter [14] aus den theoretischen Ansätzen über geometrische Betrachtungen an den Zahnradern zum Fördervorgang.



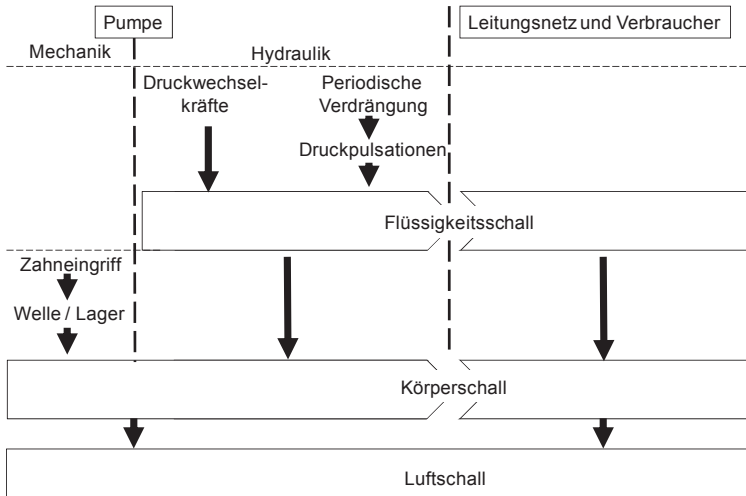
**Bild 2.1:** Momente an den Zahnradern in einer Außenzahnradpumpe [12]

## 2.2 Ursachen der Geräuscentwicklung

Für die Geräuscentwicklung an hydraulischen Anlagen ist ursächlich die Pumpe und in ihrer Verstärkung das Leitungsnetz mit seinen Verbrauchern verantwortlich (Bild 2.2). Dabei können die Schallübertragungswege des Flüssigkeitsschalls, des Körperschalls und des Luftschalls systemisch mit dargestellt werden. Diese werden von mechanischen und hydraulischen Wirkprinzipien angeregt. Die Ursachen für die Geräuscentstehung sind auf der hydraulischen Seite die Druckwechselkräfte und Druckpulsationen [3, 15]. Die Ursachen für die Geräuscentstehung auf der mechanischen Seite sind der Zahneingriff und die Kraftweiterleitungen bis hin zu den Wellenlagerungen. Die mechanischen Einflüsse sind allerdings sehr gering gegenüber



den hydraulischen Einflüssen auf die Geräuscentstehung [5, 16, 17, 18]. Den Geräuschverstärkungen in Leitungsnetz und Verbraucher kann am effektivsten über die Einführung von pulsationsmindernden Maßnahmen an der Pumpe entgegengewirkt werden [3, 8, 18].



**Bild 2.2:** Schallausbreitung in Hydraulikanlagen

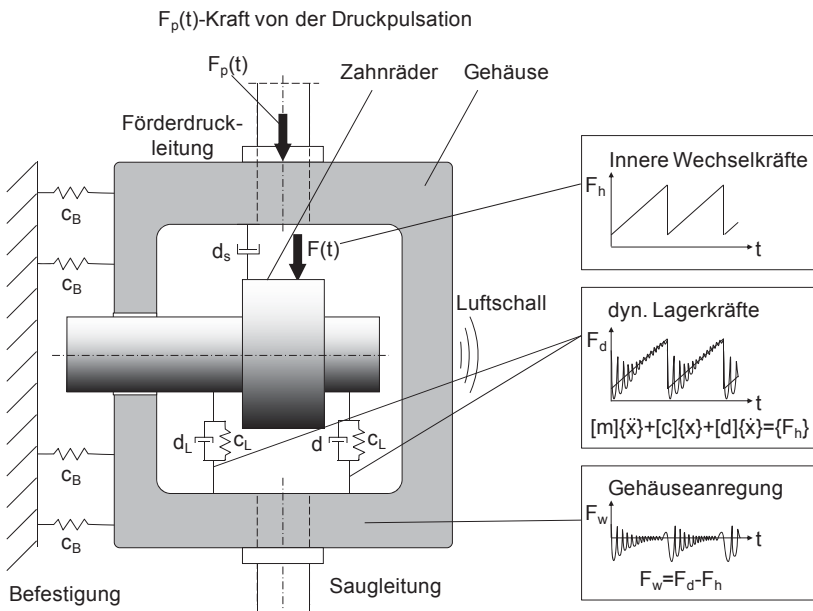
Die mechanischen und hydraulischen Quellen auf die Geräuscentstehung gliedern sich bei Zahnradpumpen nach folgendem Schema [5]:

#### Geräuschursachen bei Zahnradpumpen

Mechanische Geräusche	Hydraulische Geräusche
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Verzahnungsgeräusche durch <ul style="list-style-type: none"> <li>• Flankenformfehler der Zahnräder</li> <li>• Eingriffsfehler der Zahnräder</li> <li>• Eingriffsfehler durch Lageänderung der Räderachsen</li> <li>• Teilungsfehler</li> <li>• Rundlauffehler</li> </ul> </li> <li>2. Exzentrizität von Kopfkreis und Wellenaußendurchmesser</li> <li>3. Lagerfehler</li> <li>4. Schwingungen von Ventilen</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Schlecht lokalisierte Entlastungsnot (Quetschölnot)</li> <li>2. Förderstompulsation (Höhe und Frequenz)</li> <li>3. Druckpulsation (Höhe und Frequenz)</li> <li>4. Höhe des Druckgradienten (Druckänderungsgeschwindigkeit <math>dp/dt</math> bzw. <math>dp/d\varphi</math>)</li> <li>5. Strömungsverhältnisse (Wirbel, Ablösungen, Umlenkungen)</li> <li>6. Kavitation</li> </ol>

Druckwechselkräfte nehmen dabei einen direkten Einfluss auf die Schallentstehung in der Pumpe. Druckpulsationen wirken sich dagegen an den angrenzenden Bauteilen und Leitungen als Schallquelle aus [3, 8]. Jedoch stehen die Druckwechselvorgänge und die Förderdruckpulsationen im engen Zusammenhang [3, 19].

Die Druckwechselkräfte im Inneren der Pumpe resultieren aus den Druckwechselvorgängen. Diese Vorgänge finden in der Pumpe an den Umsteuerpunkten statt und ändern sich periodisch mit den Lastwechseln des Drucks [3]. Die Druckwechselkräfte mit den mechanischen Eingriffskräften erzeugen Schwingungen an den Zahnrädern (Kraft  $F(t)$ ), die sich über die Lagerung ins Gehäuse fortpflanzen und zum einen Teil über das Gehäuse in Luftschall umgewandelt werden und zum anderen Teil durch Befestigungen weitergeleitet werden (Bild 2.3). Die Druckpulsationen an Saug- und Förderdruckleitung verursachen dagegen eine Kraft  $F_p(t)$ , die sich auf das Gehäuse rückwirkt. Fiebig [20] leitet die theoretischen Grundlagen für die Beträge der Druckwechselkräfte her. Er stellt fest, dass bei Außenzahnpumpen die hydraulisch bedingten Wechselkräfte durch Addition der mechanischen Eingriffskräfte am getriebenen Rad größer sind als am angetriebenen Rad. Bei Innenzahnpumpen dreht sich dieser Effekt um, jedoch nur für die am Ritzel angetriebenen Innenzahnpumpen.



**Bild 2.3:** Innere Erregerkräfte in einer Außenzahnpumpe [20]

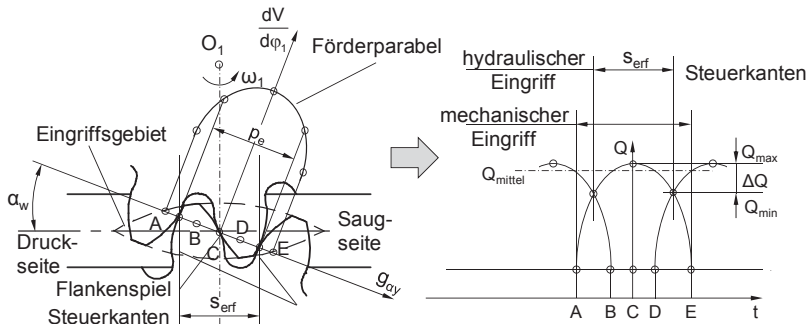
Die Ungleichmäßigkeit des Förderstroms steht im Zusammenhang mit den am Pumpenausgang zu erfassenden Druckpulsationen. Fiebig und Lang [21] zeigen diesen Zusammenhang zwischen der Volumenstrompulsation und der Druckpulsation. Nach Fricke [18] ist ersichtlich, dass mit steigendem Förderdruck eine Zunahme des Schalldruckpegels im höherfrequenten Bereich erkennbar ist. Grbovic [22] erfasst direkt mit einer Heissfilmsonde die Volumenströme und Volumenstromschwankungen und vergleicht die Ergebnisse mit gemessenen Förderdrücken. Dabei stellt er fest, dass die Volumenstromschwankungen synchron mit den Druckpulsationen einhergehen. Jedoch zeigen die gemessenen Druckpulsationen größere Amplituden als die aus der geometrischen Pulsation entstehenden Amplituden [6]. Die gesamte Volumenstrompulsation setzt sich zusammen aus geometrischer Pulsation, Kompressionspulsation und Leckstrompulsation [8, 10]. Die geometrische Pulsation entsteht durch die endliche Anzahl an Verdrängungselementen (Zahnkammern), die am diskontinuierlichen Förderprozess beteiligt sind. Die Kompressionspulsation resultiert aus den im Druckaufbauvorgang periodisch schwankenden Rückströmungen. Die Kompressionspulsation vergrößert den Ungleichförmigkeitsgrad. Beim Druckwechselvorgang vom Hochdruck- zum Niederdruckbereich entsteht die Leckstrompulsation durch die sich periodisch ändernde Spaltlängen und die Spaltanzahl. Diese wirkt sich ebenfalls erhöhend auf die Förderstrompulsation aus. Link [10] untersucht die Einflüsse der beiden zuletzt genannten Pulsationsarten auf das Betriebsverhalten der Außenzahnradpumpen. Er entwickelt ein VerdängermodeLL und bestätigt seine Annahmen durch Wirkungsgrad- und Innendruckmessungen, dass die geometrische Pulsation den größten Anteil an der Förderstrompulsation hat. Willekens [23] leitet theoretisch die Einflüsse der Verzahnungen auf das Fördervolumen und den Ungleichförmigkeitsgrad von Außen- und Innenzahnradpumpen ab. Verifikationen dazu sind nicht vorhanden.

Wie eingangs erwähnt wird, sind die Druckwechselkräfte und die Druckpulsationen für die Geräuschentwicklung auf der hydraulischen Seite in Zahnradpumpen verantwortlich. Zur Reduzierung der Druckwechselanregungen zur Verbesserung des Geräuschverhaltens sind verschiedene Maßnahmen bekannt. Hübsch [17] untersucht an nicht druckkompensierten Außenzahnradpumpen die Geräuschentstehung und empfiehlt einen großen Druckaufbaubereich vorzusehen. Morlock [8] entwickelt aus dem Energieansatz (vgl. Bild 2.1) den momentanen Volumenstromverlauf über den Dichtpunktabstand  $g_{ay}$  zum Wälzpunkt C und daraus die Steggestaltungen. Der theoretische Volumenstromverlauf aus dem Energiesatz in Gleichung (2.2) wird für Innen- und Außenzahnradpumpen als anwendbar angegeben.

$$Q = \frac{dV}{d\varphi_1} = \frac{b}{2} \cdot \left[ \left( r_{a1}^2 + \frac{1}{i} \cdot r_{a2}^2 \right) - (1+i) \cdot r_{w1}^2 - \left( 1 + \frac{1}{i} \right) \cdot (g_{ay})^2 \right] \quad (2.2)$$

Es ist erkennbar, dass der Verlauf des Förderstroms infolge der Variablen  $g_{ay}$  (Abstand des Dichtpunkts vom Wälzpunkt) immer eine Parabel darstellt, die durch den Nullpunkt (Wälzpunkt C) symmetrisch verläuft (vgl. Bild 2.4).

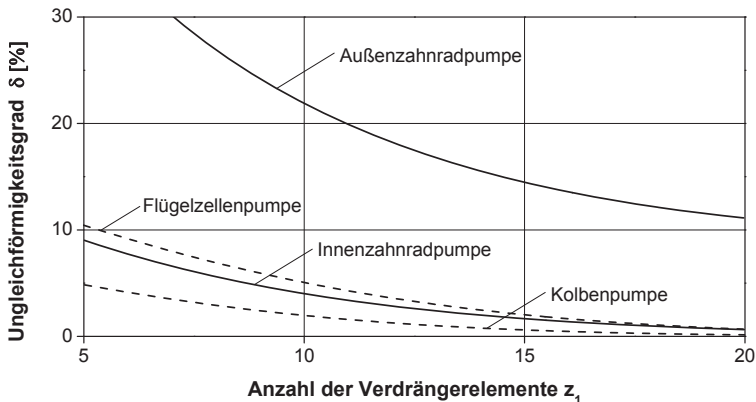
Daraus werden Stegmaße und Entlastungsnuten (Steuerkanten) für spaltkompensierte Außenzahnradpumpen abgeleitet. Diese sind symmetrisch um den Wälzpunkt C angeordnet, wie auch andere Autoren in ihren Ansätzen darstellen [12, 24] (Bild 2.4).



**Bild 2.4:** Umsteuervorgänge und Einfluss der Steuerkanten [12, Auszug]

Becher und Rausch [25] weisen mit der Einflankendichtung in Außenzahnradpumpen eine höhere Druckpulsation als mit der Zweiflankendichtung, die ohne Flankenspiel entsteht, nach. Schwuchow [12], Riedl [24] und Braun [26] entwickeln und untersuchen nichtevolventische Außenverzahnungen zur Minderung der Volumenstrompulsation. Kollek und Stryczek [27] stellen die Grundverzahnungsparameter dar, die für die Optimierung zum Geräuschverhalten und Pulsationen beitragen. Seltenheim [11] entwickelt aus theoretischen Herleitungen zum besseren Kammerfüllvermögen spezielle Nuten an den Verzahnungen und eine neue Rückflankengestaltung. Heisel et al. [28] zeigen durch Zahnkopfrücknahme eine reduzierte Geräuschabstrahlung als Ergebnis, um direkten Einfluss auf die Vermeidung der Eingriffsstöße zu nehmen. Gutbrod [5] und Morlok [8] leiten aus den theoretischen und experimentellen Untersuchungen verschiedenen Maßnahmen zur Senkung des Ungleichförmigkeitsgrades ab. Die Vergrößerungen des Profilverschiebungsfaktors und des Kopfhöhenfaktors bewirken eine Reduzierung des Ungleichförmigkeitsgrades, jedoch bleibt die Pulsationsintensität aufgrund der konstanten Eingriffsteilung ebenso konstant.

Untersuchungen und Optimierungen an Innenzahnradpumpen werden meist zusammen mit den Annahmen an Außenzahnradpumpen durchgeführt. Für Hohlradverzahnungen bei Innenzahnradpumpen ergibt sich aus den negativen Zähnezahlen des Hohlrads und positiven Übersetzungen ein niedrigerer Ungleichförmigkeitsgrad (Bild 2.5).



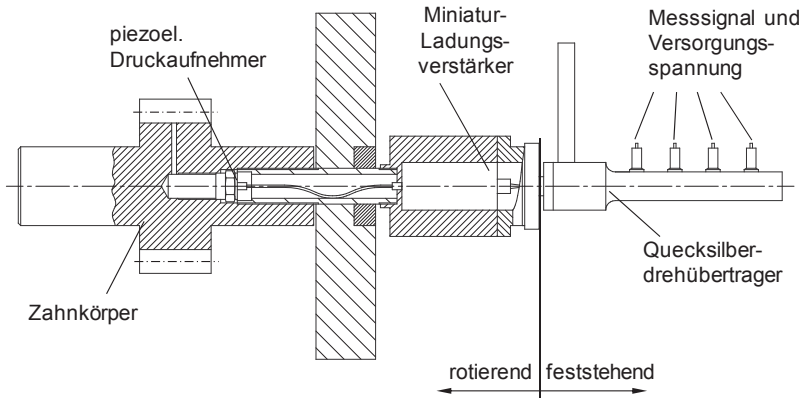
**Bild 2.5:** Ungleichförmigkeitsgrade unterschiedlicher Pumpenbauarten [3]

Gutbrod [5] und Morlok [8] zeichnen die Volumenstromschwankungen von Innenzahnradpumpen und Außenzahnradpumpen auf und stellen eine niedrigere Volumenstrompulsation an Innenzahnradpumpen fest. Die Verifizierung der theoretischen Angaben aus dem Energiesatz und Anwendungen für die Stegmaße auf Innenzahnradpumpen können aber mit den in der Arbeit aufgezeigten Versuchen nicht bestätigt werden. Fiebig [20] analysiert die hydraulisch bedingten Wechselkräfte in Außen- und Innenzahnradpumpen. Er legt dar, dass die niedrigere Pulsation von Innenzahnradpumpen nicht alleine aus dem kleineren Ungleichförmigkeitsgrad abgeleitet werden kann. Viel mehr beeinflussen die Drehmomentenschwankungen, die infolge der unterschiedlichen Raddurchmesser in einer Innenzahnradpumpe resultieren, die Amplituden der Druckpulsationen.

### 2.3 Messung des Druckverlaufs in der Zahnkammer

Um die theoretischen Annahmen von Druckwechselkräften und die Auswirkungen auf Druckpulsationen zu verifizieren, wird der Druckverlauf in der Zahnkammer gemessen. Die Besonderheit, dass der Druck auf kleinstem Raum (im Zahnfuß) unter hohen Drehzahlen und Drücken gemessen werden muss, erfordert für genaue Ergebnisse hohe Anforderungen an die Messtechnik. Gutbrod [5] führt diese Innendruckmessungen an Innen- und Außenzahnradpumpen durch. Hagen [13] installiert im Zahnkörper Quarzdruckaufnehmer und führt die Signale über Schleifringübertragungen weiter an ein Oszilloskop. Der Druck aus der Zahnücke wird über eine Bohrung ins Innere des Zahnkörpers auf den Druckaufnehmer übertragen. Verschiedene Autoren [8, 10, 17, 29] positionieren den Druckaufnehmer in der Zahnwelle (Bild 2.6). Der Druck führt über eine Bohrung im Zahnfuß zur Bohrung in der Zahnwelle, in der der piezoelektrische Drucksensor erst das Signal erfasst und über einen

Miniaturladungsverstärker weiterleitet. Das Totvolumen beträgt 5 – 8 % vom Zahnlückenvolumen [8]. Die Übertragung erfolgt mittels Schleifringübertragung (Quecksilberdrehübertrager).



**Bild 2.6:** Messanordnung in einer Außenzahnradpumpe [29]

Eaton et al. [30] positionieren zwei Druckaufnehmer im Zahnfuß. Bei der höchsten Drehzahl ( $5000 \text{ min}^{-1}$ ) wird eine Winkelauflösung von  $9,5^\circ$  pro Abtastpunkt für eine Abtastrate von 6,3 kHz erreicht. Wustmann [31] erzeugt durch Senkerodieren eine schräg zur Wellenachse positionierte Aufnahme durch die Zahnwelle in den Zahnfuß, in dem er einen Miniaturdruckaufnehmer einklebt. Das verbleibende Totvolumen zum Zahngrund und Sensorkopf wird mit einem Silikon aufgefüllt, um den Sensor kräftefrei zu positionieren. In den Auswertungen erhält er jedoch trotzdem durch mechanische Verspannungen an der Ritzelwelle ein verändertes Signal. Bei einer Versuchsdrehzahl von maximal  $2000 \text{ min}^{-1}$  und einer Abtastrate von 50 kHz erhält er eine Winkelauflösung von  $0,24^\circ$  pro Abtastpunkt.

## 2.4 Optimierung von Pumpen mit numerischen Methoden

Mit Hilfe von CFD-Simulationen werden in jüngster Zeit an Zahnradpumpen Optimierungen vorgenommen. Ausgehend von 3D-CAD-Daten werden dynamische Netze in Kontrollvolumina überführt und abhängig vom Drehwinkel beschrieben [30-33]. Daraus erhält man den Druckverlauf in der Zahnkammer. Casoli et al. [32] können parametrisiert verschiedene Druckaufbaugeometrien und Umsteuernuten untersuchen. Eaton et al. [30] konzentrieren sich auf den Druckabbauvorgang und verifizieren die numerisch erhaltenen Daten mit Messungen von zwei in der Zahnücke verbauten Drucksensoren. Wustmann [31] simuliert den Druckverlauf in der Zahnkammer für eine einflankengedichtete und eine zweiflankengedichtete Außenzahnradpumpe. Er

stellt den Einfluss der Saugdruckpulsation dar. Beide Annahmen verifiziert er mit Innendruckmessungen, Förderdruck- und Saugdruckmessungen. Manning und Kasaragadda [34] untersuchen mit numerischen Methoden die Einflüsse der Verzahnungsgeometrien auf die Förderstrompulsation. Mucci et al. [35] entwickeln ein kineto-elastodynamisches Modell einer Außenzahnradpumpe. Als Ergebnis wird die zeitlich veränderliche Druckverteilung erhalten, aus der dann Kräfte und Momente an den Pumpenrädern bestimmt werden können. Im zweiten Teil der Untersuchungen werden Parameter wie Zahnprofilfehler, Schmierstoff und Verzahnungsspiel auf die Schwingungen und Auslenkungen der Pumpenräder ermittelt [36]. Die Ergebnisse der Simulationen werden mit Kräfte- und Momentenmessungen verifiziert.

## 2.5 Fazit

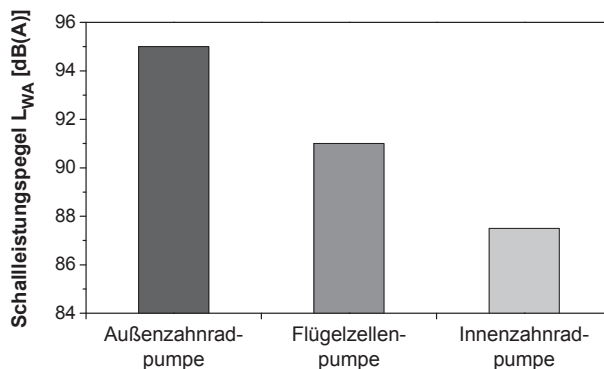
Basierend aus den aufgezeigten Literaturnennungen fällt auf, dass wenig theoretische Aussagen zu ritzelgetriebenen Innenzahnradpumpen vorliegen und kaum versuchstechnische Verifikationen existieren. Keine Untersuchungen können zu hohlradgetriebenen Innenzahnradpumpen ausfindig gemacht werden. Nachrechnungen von Innenzahnradpumpen über die angegebenen theoretischen Nachweise sind nur bedingt richtig. Im Rahmen der Messtechnik können weitere Verbesserungen einfließen. Um genauere Aussagen über Druckvorgänge und Wirkungsgrade zu erhalten, ist es von Interesse die Messdrehzahl zu erhöhen und die Drucksensoren in der Zahnücke ohne jegliches Totvolumen einzubringen.





### 3 Problemstellung und Zielsetzung

Die recherchierten Arbeiten zeigen, dass sich Untersuchungen an Zahnradpumpen hauptsächlich auf Außenzahnradpumpen konzentrieren. Die theoretischen Grundlagen, die den Fördervorgang beschreiben, werden durch entsprechende Vorzeichenumkehr auf Innenzahnradpumpen übertragen. Daraus ergeben sich für den Umsteuervorgang von Hochdruck- zum Niederdruckbereich bei Innenzahnradpumpen entsprechende symmetrische Stegmaße wie bei Außenzahnradpumpen. Die Stegmaße werden über das Volumenminimum aus der Gleichung des momentanen Förderstroms (siehe Gleichung (2.2)) abgeleitet. Der Quetschraum erreicht das Volumenminimum beim Eingriff mit Flankenspiel nach einer halben Eingriffsteilung bzw. einer viertel Eingriffsteilung bei Verzahnungen ohne Flankenspiel. Diese Annahmen können jedoch aus praktischen Beobachtungen nicht auf Innenzahnradpumpen übertragen werden. Ebenso werden in der Literatur keine allgemeingültigen Aussagen über die Gehäusegeometrien wie insbesondere z.B. für die Sichelgeometrie in Innenzahnradpumpen aufgezeigt. Die Auslegungen für Umsteuergeometrien werden meist heutzutage über Versuche praktisch ermittelt [3]. Innenzahnradpumpen sind durch die aufwändigere Hohlradfertigung und durch die geringere Anzahl an Gleichteilen kostenintensiver als Außenzahnradpumpen. Deshalb werden trotz höherer Pulsationen und Schalleistungspegel Außenzahnradpumpen den Innenzahnradpumpen bevorzugt (Bild 3.1). Eine erhöhte Körperschallanregung und unterschiedliche Schwingungsübertragungen führen in Außenzahnradpumpen zu höheren Geräuschemissionen als bei Innenzahnradpumpen [3].



**Bild 3.1:** Vergleich der Schalleistungspegel verschiedener Pumpenarten [3]

In der vorliegenden Arbeit sollen deshalb für Innenzahnradpumpen Auslegungsmerkmale untersucht und optimiert werden. Besonders soll dabei die Auslegung auf

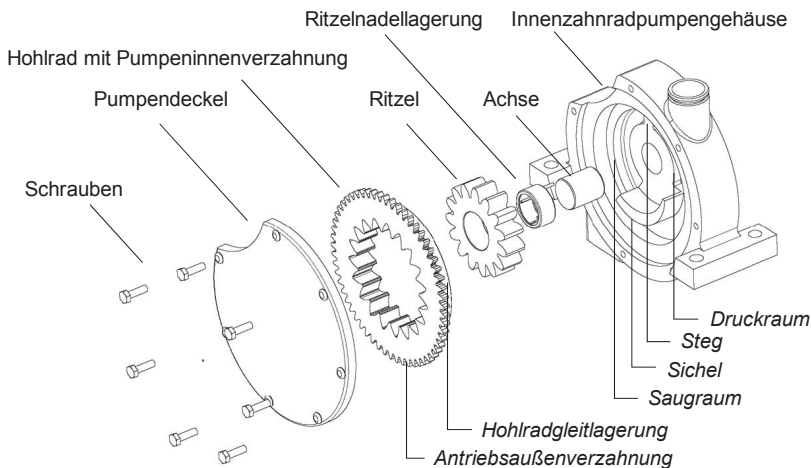
die Minimierung von Druckpulsationen und Druckwechselkräften abzielen, da diese vornehmlich einen Einfluss auf das Pumpengeräusch und die Leistung haben.

### 3.1 Angewandtes Antriebskonzept

Es wird eine hohlradgetriebene Innenzahnradpumpe betrachtet, deren Antriebskonzept invers im Vergleich zu konventionellen Innenzahnradpumpen ist, die über das Ritzel angetrieben werden [37]. Dafür wird das Hohlrad seitlich um ein außenverzahntes Antriebsrad erweitert und das Gehäuse am Antriebsrad-Zahneingriff geöffnet. Die Welle, die Abdichtung und ein Zahnrad der Antriebskette entfallen somit. Dieses Konzept liefert eine Kostenreduktion und kommt dem Kosten-Niveau von Außenzahnradpumpen sehr nahe. Des Weiteren kann der axiale Bauraum und die Anzahl der Bauteile reduziert werden.

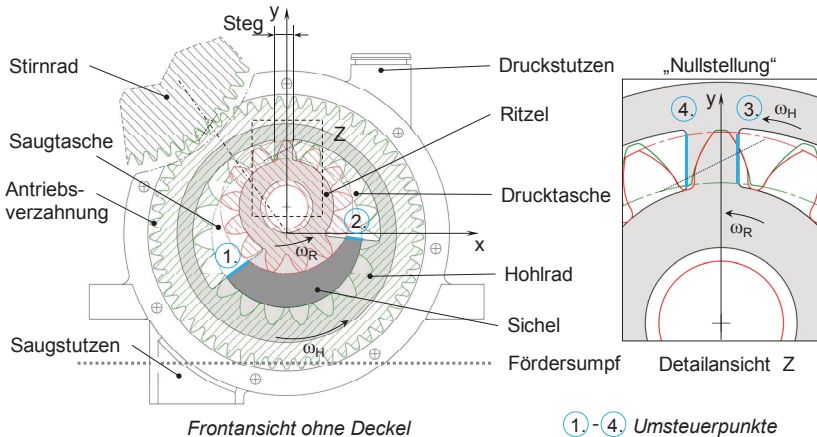
Im Wesentlichen baut sich die hohlradgetriebene Innenzahnradpumpe von rechts nach links gesehen koaxial nach der Explosionszeichnung in Bild 3.2 über folgende Bauteile auf:

- Innenzahnradpumpegehäuse mit Druckraum, Steg, Sichel und Saugraum
- Achse
- Ritzelnadellagerung
- Ritzel
- Hohlrad mit Pumpeninnenverzahnung, Antriebsaußenverzahnung und Hohlradgleitlagerung
- Pumpendeckel
- Schrauben



**Bild 3.2:** Konstruktiver Aufbau der hohlradgetriebenen Innenzahnradpumpe

Wird die hohlradgetriebene Pumpe zusammengesetzt, ragt die Antriebsverzahnung, die mit dem Antriebsstirnrad im Eingriff steht, radial aus der Pumpengehäusekontur hervor (Bild 3.3). Je nach dem Zähnezahlverhältnis zwischen der Antriebsverzahnung auf dem Hohlrad und dem Stirnrad wird das Hohlrad schneller oder langsamer gegenüber der Drehzahl der Stirnradverzahnung angetrieben.



**Bild 3.3:** Umsteuerpunkte und Nullstellung in der HGP

Mit Hilfe der Detailansicht Z in Bild 3.3 in dem der obige Ritzelzahn symmetrisch zur senkrechten y-Achse in die Hohlradlücke eingreift, soll die Pumpenfunktion erklärt werden. Die Stellung zwischen Ritzelzahn und Hohlradlücke wird als „Nullstellung“ definiert. Wird das Pumpenverzahnungspaar durch die Antriebsbewegung aus der Nullstellung nach links gedreht, so trennt sich der Zahneingriff zwischen dem Ritzelzahn und der Hohlradlücke auf der linken Seite der y-Achse. Dadurch tritt eine Volumenvergrößerung zwischen den Zahnlücken auf und das Fördermedium kann über die nierenförmige Saugtasche (Bild 3.3) in das aufgehende Zahnlückenvolumen nachströmen. Die Saugtasche ist mit dem Saugstutzen verbunden und bildet im Gehäuse die Saugkanalisierung vom Fördersumpf bis zur nierenförmigen Saugtasche. Die Zahnlücken werden am ersten Umsteuerpunkt ① an der Sichel von der Saugseite getrennt. Das Fördermedium befindet sich nun in den Ritzel- und Hohlradzahn- lücken, das durch enge Spalte zwischen der Sichelkontur und den Zahnkopfkreisen am Austreten gehindert wird. Zusätzlich kann ein axiales Austreten des Fördermedi- ums durch enge Seitenspalte links und rechts an den Stirnseiten der Verzahnungen mit Hilfe der Gehäuseinnenkontur und dem Deckel vermieden werden. Der durch Verbraucher erzeugte herrschende Förderdruck in der Drucktasche und im Druck- stutzen passt sich über den dichtenden Sichelbereich in den Zahnlücken vom Saug- zum Förderdruck an. Zahnkopf- und Zahnseitenspalte lassen nur geringe

Leckströme zu und ermöglichen damit einen Förderdruckaufbau über alle dichtenden Zahnücken. Treten die Uücken in die Drucktasche ein, unterliegt das Fördermedium bereits dem Förderdruck. Das Eintreten in den Förderdruckbereich wird als zweiter Umsteuerpunkt ② (Bild 3.3) bezeichnet. Durch das Ineinandergreifen der Verzahnungen im Eingriffsbereich beginnt die eigentliche Förderung, in dem das Fördermedium aus den Zahnücken verdrängt wird. Am Steg wird die eingreifende Verzahnung axial abgedichtet. Die weiter gegen den Uhrzeigersinn auftretenden Kanten des Steges begrenzen einmal zum Druckraum hin das abgedichtete Volumen in der Verzahnung am dritten Umsteuerpunkt ③ und zum Saugraum hin am vierten Umsteuerpunkt ④ (Bild 3.3). Der Fördervorgang findet sein Ende bzw. erneuten Anfang an diesem vierten Umsteuerpunkt, an dem die Zahnücken erneut geöffnet werden.

Der Antrieb über das Hohlrad zieht jedoch neue Auslegungskriterien nach sich. Ein einseitig angetriebenes Hohlrad kann zur Verkipfung des Pumpenrades und somit zu einer einseitigen Erweiterung der Spaltmaße mit den daraus resultierenden Wirkungsgradeinbußen führen. Um die Untersuchungen einzugrenzen, sind die verwendeten und untersuchten Verzahnungen in dieser Arbeit evolventische Geradzahnungen, da diese die größte Verbreitung in Pumpenanwendungen finden. Für diese Pumpen gelten die Gültigkeitsbereiche nach Tabelle 3.1.

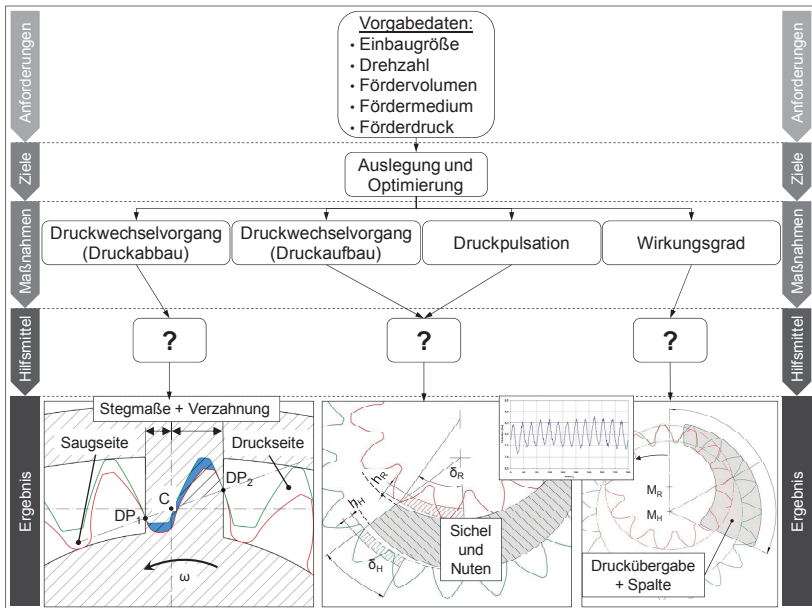
**Tabelle 3.1:** Gültigkeitsbereich für Pumpenanwendungen

<i><b>Einflussgröße</b></i>	<i><b>Formelzeichen</b></i>	<i><b>Einheit</b></i>	<i><b>Gültigkeitsbereich</b></i>
<i>Modul</i>	m	mm	1...10
<i>Zähnezahl</i>	z		7...25
<i>Eingriffswinkel</i>	$\alpha$	°	15...30
<i>Verzahnungsbreite</i>	b	mm	10...40
<i>Profilverschiebungsfaktor</i>	x		-1...1
<i>Fördervolumenstrom</i>	$Q_{\max}$	$\text{l} \cdot \text{min}^{-1}$	100...280
<i>Drehzahl</i>	n	$\text{min}^{-1}$	750...3000
<i>Förderdruck</i>	$p_D$	bar	0...20

## 3.2 Analytische Lösungen zur Optimierung der Pumpe

Im Gegensatz zu Optimierungen über CFD-Tools soll mit Hilfe dieser Arbeit bereits bei der Auslegung dem Konstrukteur die Möglichkeit gegeben werden, aus den Vorgabedaten und Anforderungen für die Pumpe sanfte Druckwechselvorgänge für den Druckaufbau und Druckabbau zu erhalten. Zusätzlich soll eine Minimierung der Druckpulsationen und Maximierung des Wirkungsgrades erreicht werden (Bild 3.4). Diese Maßnahmen sind über geeignete Hilfsmittel zu erreichen und schließen die Bereiche der Verzahnungsauslegung, Steggestaltung, Sichelgestaltung, Druckübergabe und Spaltauslegung mit ein. Somit können Geräuscentstehungen und

Leckageströme weitestgehend vor dem Bau des ersten Prototyps optimiert werden. Eine Verringerung der Prototypenanzahl über diese Maßnahmen zieht eine Minimierung des Energie- und Zeitaufwandes mit sich. Über die Leckageströme werden Aussagen zum einseitigen Antrieb und dem Wirkungsgrad gemacht. Die Hilfsmittel für die Auslegung sind zu erarbeiten und in entsprechenden Anwendungen für den Konstrukteur darzulegen. Der Konstrukteur soll in die Lage versetzt werden, ohne Expertenwissen hohlradgetriebene Innenzahnradpumpen anhand von Basisvorgabedaten auszulegen (Bild 3.4).



**Bild 3.4:** Aufgabenstellung beim Auslegen von hohlradgetriebenen IZP

Über die Normvorschriften DIN 45 635 Teil 26 [38] und ISO 4412-1 [39] werden Aussagen zu Geräuschmessverfahren für hydrostatische Pumpen und in DIN 45 635 Teil 41 [40] für Hydraulikaggregate dargelegt. Gösele [6] und Fiebig [41] zeigen jedoch auf, dass die Ermittlung der Schallwerte aufgrund vieler Einflussfaktoren zu Ungenauigkeiten führen kann. Die Abhängigkeit der Druckvorgänge im Inneren der Pumpe und die Auswirkungen der Druckpulsationen in der Anlage auf das Geräuschverhalten zeigt das Kapitel 2.2 auf. In dieser Arbeit werden die Druckmessungen von Druckwechsellvorgängen und Druckpulsationen bevorzugt und untersucht. Die Druckwechsellvorgänge sind auch für die eingebrachte Leistung und die Lebensdauer der Pumpe von Bedeutung. Schallpegelmessungen können nur in begrenzter Anzahl für die Pumpentypen im Einsatz in einer Getriebeeinheit durchgeführt werden.



## 4 Grundlagen für Verzahnungen und Pumpenmerkmale

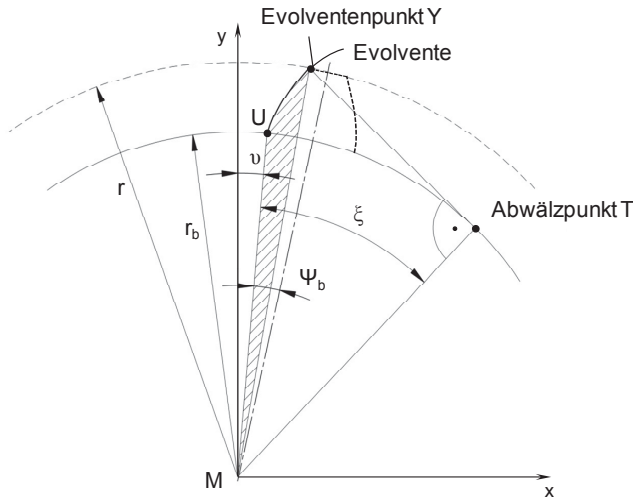
### 4.1 Verzahnungsgrundlagen für Evolventenverzahnungen

Für die anstehenden Berechnungen zu hohlradgetriebenen Innenzahnradpumpen sind jeweils an Hohlrad und Ritzel vier Evolventen zu betrachten. Die Hohlradevolventen werden als mathematisch genaue Evolventen angenommen. Das Verzahnungsspiel  $j_t$  wird nur über die unbelastete Ritzevolvente definiert (siehe Bild 4.2).

Ein beliebiger Punkt auf einer Evolvente kann in x- und y-Koordinaten abhängig von der jeweiligen Position auf der Evolvente und abhängig von der Verdrehung der Evolvente angegeben werden (Bild 4.1). Der beliebige Evolventenpunkt Y wird um den Winkel  $\xi$  ausgehend vom Startpunkt U des Grundkreises  $r_b$  auf der Evolvente abgerollt. Die Tangente von Y an den Grundkreis schneidet diesen im Abwälzpunkt T. Die Linie zum Punkt U ist von der Ordinate um den Winkel  $\nu$  verdreht. Somit lassen sich die x- und y-Koordinaten des Punktes Y in Abhängigkeit von den Winkeln  $\nu$  und  $\xi$  angeben:

$$Y_x = |r_b| \cdot (\sin(\xi + \nu) - \xi \cdot \cos(\xi + \nu)) \quad (4.1)$$

$$Y_y = |r_b| \cdot (\cos(\xi + \nu) + \xi \cdot \sin(\xi + \nu)) \quad (4.2)$$



**Bild 4.1:** Koordinaten eines Punktes auf der Evolvente

Angewendet auf die jeweils vier Evolventen für das Hohlrad und das Ritzel wird der allgemeine Verdrehwinkel  $\nu$  durch den Grundkreis-Zahndickenhalbwinkel  $\Psi_b$ , den Drehwinkel  $\gamma$  und die Teilung  $\pi/z$  ersetzt. Der Grundkreis-Zahndickenhalbwinkel  $\Psi_b$  bezeichnet den Winkel zwischen der Linie vom Mittelpunkt M zur gedachten Zahnmitte und der Linie vom Mittelpunkt M bis zum Entstehungspunkt U der Evolvente (Bild 4.1). Es gelten für die Evolventenpunkte links und rechts der betrachteten Hohlradlücke in x- und y-Formen der Koordinaten die folgenden Gleichungen. Die Indizes für die Gleichungen (4.3) bis (4.10) beziehen sich auf die folgende Legende:

Evo	Evolvente
x, y	x- bzw. y-Koordinate
H, R	Hohlrad bzw. Ritzel
r, l	rechte bzw. linke Evolvente ausgehend von der Nullstellung

$$P_{\text{EvoxHl}} = |r_{\text{bH}}| \cdot \left( \sin \left( \xi + \gamma + \psi_{\text{bH}} - \frac{\pi}{|z_{\text{H}}|} \right) - \xi \cdot \cos \left( \xi + \gamma + \psi_{\text{bH}} - \frac{\pi}{|z_{\text{H}}|} \right) \right) \quad (4.3)$$

$$P_{\text{EvoyHl}} = |r_{\text{bH}}| \cdot \left( \cos \left( \xi + \gamma + \psi_{\text{bH}} - \frac{\pi}{|z_{\text{H}}|} \right) + \xi \cdot \sin \left( \xi + \gamma + \psi_{\text{bH}} - \frac{\pi}{|z_{\text{H}}|} \right) \right) \quad (4.4)$$

$$P_{\text{EvoxHr}} = |r_{\text{bH}}| \cdot \left( \sin \left( -\xi + \gamma - \psi_{\text{bH}} + \frac{\pi}{|z_{\text{H}}|} \right) + \xi \cdot \cos \left( -\xi + \gamma - \psi_{\text{bH}} + \frac{\pi}{|z_{\text{H}}|} \right) \right) \quad (4.5)$$

$$P_{\text{EvoyHr}} = |r_{\text{bH}}| \cdot \left( \cos \left( -\xi + \gamma - \psi_{\text{bH}} + \frac{\pi}{|z_{\text{H}}|} \right) - \xi \cdot \sin \left( -\xi + \gamma - \psi_{\text{bH}} + \frac{\pi}{|z_{\text{H}}|} \right) \right) \quad (4.6)$$

Die Ritzel evolventen werden entsprechend beschrieben. Zusätzlich gilt für die voreilende Evolvente des Ritzels die Berücksichtigung des Flankenspiels  $j_t$ .

$$P_{\text{EvoxRl}} = r_{\text{bR}} \cdot (\sin(\xi + \gamma^* i - \psi_{\text{bR}}) - \xi \cdot \cos(\xi + \gamma^* i - \psi_{\text{bR}} - j_t)) \quad (4.7)$$

$$P_{\text{EvoyRl}} = r_{\text{bR}} \cdot (\cos(\xi + \gamma^* i - \psi_{\text{bR}}) + \xi \cdot \sin(\xi + \gamma^* i - \psi_{\text{bR}} - j_t)) + |a| \quad (4.8)$$

$$P_{\text{EvoxRr}} = r_{\text{bR}} \cdot (\sin(-\xi + \gamma^* i + \psi_{\text{bR}} - j_t) + \xi \cdot \cos(-\xi + \gamma^* i + \psi_{\text{bR}})) \quad (4.9)$$

$$P_{\text{EvoyRr}} = r_{\text{bR}} \cdot (\cos(-\xi + \gamma^* i + \psi_{\text{bR}} - j_t) - \xi \cdot \sin(-\xi + \gamma^* i + \psi_{\text{bR}})) + |a| \quad (4.10)$$



#### 4.1.1 Verzahnung mit Flankenspiel

Eine Verzahnung mit Flankenspiel zeichnet sich dadurch aus, dass die betrachtete Vorderflanke der Ritzelverzahnung nicht zum Eingriff kommt (Bild 4.2). Im Eingriffsbereich einer Verzahnung mit Flankenspiel bildet sich über die zwei Zahneingriffe zwischen Hohlrad und Ritzel der im Bild 4.2 schraffierte Dichtraum aus. Dieser wird über die auf der Eingriffslinie liegenden Dichtpunkte  $DP_1$  und  $DP_2$  begrenzt. Dabei definiert sich der gesamte Eingriffsbereich über die Länge von  $g_a$  auf der Eingriffslinie (Bild 4.2). Der Beginn des dichtenden Eingriffspunkts  $DP_1$  ist vom Wälzpunkt C im Abstand der Kopfeingriffsstrecke  $g_{aR}$  entfernt. Die auf das Ritzel bezogene Kopfeingriffsstrecke  $g_{aR}$  entspricht der Fußeingriffsstrecke  $g_{aH}$  vom Hohlrad. Der variable Abstand des Dichtpunkts  $DP_1$  vom Wälzpunkt C ist in Bild 4.2 mit  $f_a$  bezeichnet. Der Abstand von zwei aufeinander folgenden Dichtpunkten entspricht der Eingriffsteilung  $t_e$ .

Der Dichtraum findet sein Ende, wenn sich die Evolventen von Ritzel und Hohlrad durch die Drehbewegung nicht mehr berühren und der Dichtpunkt  $DP_2$  sich auflöst. Der Dichtpunkt  $DP_1$  hat dabei den Abstand von  $(t_e - g_{aH})$  zum Wälzpunkt C.

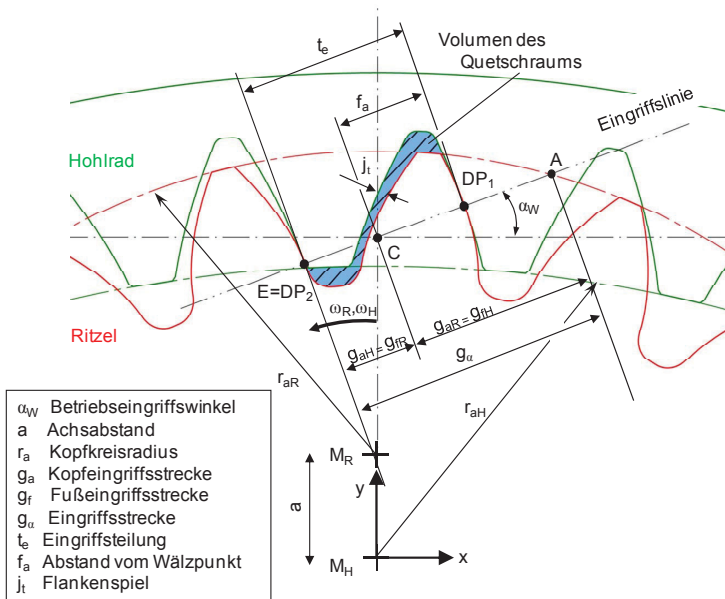
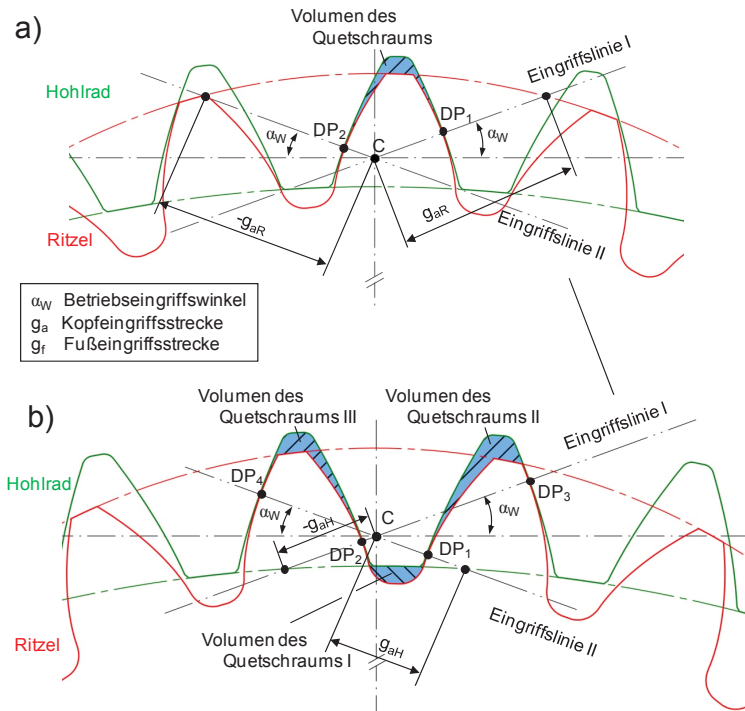


Bild 4.2: Verzahnung mit Flankenspiel

#### 4.1.2 Verzahnung ohne Flankenspiel

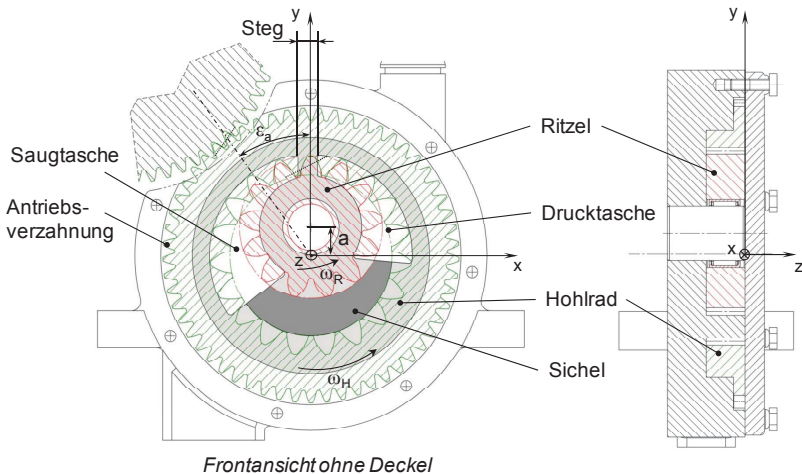
Bei einer Verzahnung ohne Flankenspiel berühren sich zusätzlich zu den Vorderflanken die Rückflanken der Verzahnungen. Es bilden sich zwei zur Symmetrieachse, die durch den Wälzpunkt geht, spiegelbildliche Eingriffslinien aus (Bild 4.3). Bei der Bildung von Dichträumen in der Verzahnung muss unterschieden werden, ob es sich um eine Ritzellücke oder um eine Hohlradlücke handelt. Dabei können sich je nach Zahnstellung bis zu drei Dichträume gleichzeitig ausbilden, wie in Bild 4.3 b) zu sehen ist. Die Abstände der dichtenden Eingriffspunkte der Dichträume haben nicht mehr die Länge der Eingriffsteilung  $t_e$ , da die Dichtpunkte eines Dichtraums immer auf zwei unterschiedlichen Eingriffslinien liegen. Somit ändern sich auch die Definitionsgrenzen. Sie bewegen sich, gemessen auf der Eingriffslinie, für eine Ritzellücke im Bereich von  $g_{aR}$  bis  $-g_{aR}$ , während sie sich für eine Hohlradlücke im Bereich von  $g_{aH}$  bis  $-g_{aH}$  bewegen.



**Bild 4.3:** Verzahnung ohne Flankenspiel

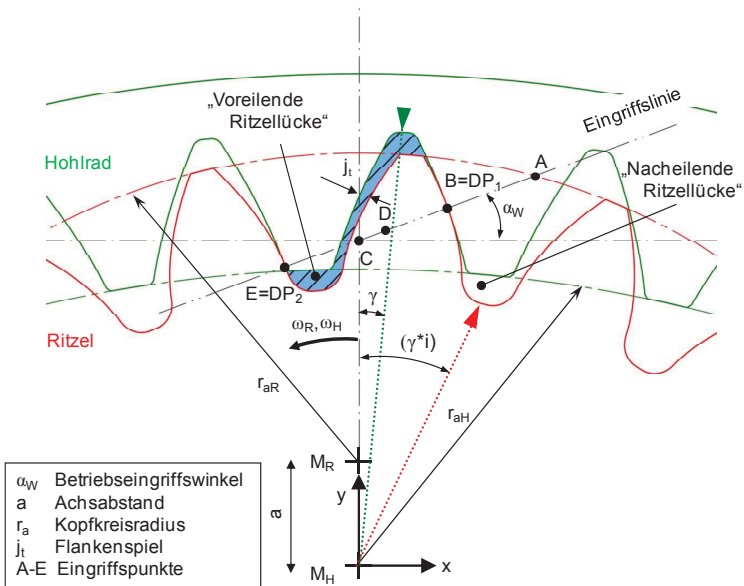
### 4.1.3 Definitionen für das Koordinatensystem und die Verzahnungen

Für folgende Berechnungen wird ein kartesisches Rechtshand-Koordinatensystem aufgespannt, das den Hohlradmittelpunkt als Koordinatenursprung besitzt (Bild 4.4). Die Pumpe wird für die Definitionen so ausgerichtet, dass die Ordinate vom Hohlradmittelpunkt senkrecht nach oben zeigt und über dem Mittelpunkt des Ritzels verläuft. Die Abszisse steht senkrecht dazu. Die z-Achse findet ihren Ursprung auf der Stirnseite des Hohlrades, an der die Antriebsverzahnung anliegt (Schnitt rechts in Bild 4.4).



**Bild 4.4:** Gehäuse mit Pumpenteilen

Für Berechnungen an der Verzahnung wird ein Drehwinkel  $\gamma$  definiert, der den Winkel zwischen einer gedachten Linie vom Mittelpunkt der Pumpe zur Mitte der betrachteten Hohlradlücke im Zahnfuß und der y-Achse beschreibt (Bild 4.5). Die voreilende und nacheilende Ritzellücke sind lagemäßig in Bild 4.5 benannt.

**Bild 4.5:** Definitionen an den Verzahnungen

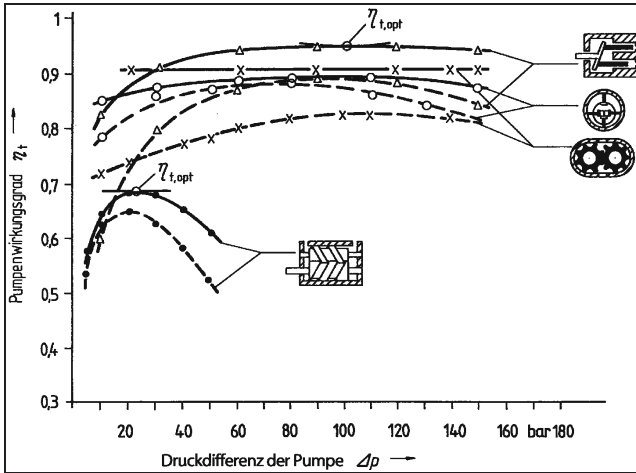
## 4.2 Wirkungsgrade

Eine Klassifizierung von Pumpen wird nicht nur anhand des Aufbaus der Pumpen und der Geometrie vorgenommen [42]. Es wird dabei auch eine Vergleichbarkeit über die Pumpenwirkungsgrade herangezogen (Bild 4.6).

Bauarten der Verdrängerpumpen	Kenngrößen für Hydropumpen DIN 24 564 Teil 1								
	Antriebs- drehzahl (maximale Drehzahl)	effektiver Förderstrom bei Nenn-drehzahl ( $n_n=1500\text{min}^{-1}$ )	zulässiger Betriebs- druck (Dauerdruck DIN 24 312)	Nenngröße geometr. Förder- volumen (ISO 3662)	Druck- flüssigkeits- temperatur- bereich	kinemat. Viskositäts- bereich (40°C)	A-Schall- leistungs- pegel (DIN 45639)	Gesamt- wirkungs- grad (Bestwir- kungsgrad)	
Niederdruckpumpe									
Mitteldruckpumpe									
Hochdruckpumpe									
	$n^P_{\max}$ $\text{min}^{-1}$	$q^P_{Ve}$ $\text{l/min}$	$P^P_{zul}$ $\text{bar}$	$V^P_g$ $\text{cm}^3$	$\vartheta^P_{\min} \dots \vartheta^P_{\max}$ $^{\circ}\text{C}$	$\nu^P_{\min} \dots \nu^P_{\max}$ $\text{mm}^2/\text{s}$	$L_{WA}$ $\text{dB}$	$\eta^P_{t,opt}$	—
<b>Außenzahnradpumpe/</b>									
mit festem Spalt	800...3000	6,5... 280	120	5,3... 200	-15... +80	22... 90	68... 88	0,80	
druckkompensiert mit:									
druck. radial. Abdichtg.	800...3000	1,5... 24	175	1... 16	-15... +80	42... 90	68... 85	0,89	
saug. radial. Abdichtg.	2000...3500	6... 243	210... 250	4... 162	-15... +80	20... 100	61... 76	0,90	
<b>Innenzahnradpumpe/</b>									
ein-/mehrstufig	1200...5000	5,6... 576	63... 250	5,1... 500	-20... +80	20... 100	73... 83	0,87	
druckkompensiert	2500... 4500	5,4... 370	175... 300	3,6... 250	-20... +80	28... 100	69... 79	0,93	
<b>Zahnringpumpe</b>	1500...1800	4... 50	120	3,15... 40	-10... +80	16... 150	70... 84	0,80	
<b>Flügelzellenpumpe</b>									

**Bild 4.6:** Pumpenbauarten und deren Wirkungsgrade (Auszug) [42]

In Bild 4.7 sind die Pumpengesamtwirkungsgrade der verschiedenen Pumpenbauarten über dem Differenzdruck, also dem Förderdruck  $p_D$ , abgetragen. Die Kolbenpumpen weisen mit den druckkompensierten Innenzahnradpumpen die besten Wirkungsgrade auf, gefolgt von den Flügelzellenpumpen und den Außenzahnradpumpen. Im Niederdruckbereich ( $< 20$  bar) schneiden Zahnradpumpen besser ab als Flügelzellen- und Schraubenpumpen. Die in dieser Arbeit behandelten Pumpen arbeiten im Niederdruckbereich mit Förderdrücken bis zu 20 bar. Im Vergleich mit Bild 4.6 lässt sich in Bild 4.7 erkennen, dass die dort angegebenen Wirkungsgrade die maximal erreichbaren Wirkungsgrade sind. Jedoch sind gerade im Niederdruckbereich die aufgezeigten Wirkungsgrade stets geringer als im optimalen Arbeitspunkt. Für hohlradgetriebene Innenzahnradpumpen im Niederdruckbereich bis zu 20 bar sind die maximalen Wirkungsgrade in Bild 4.6 nicht umsetzbar. Eine Vergleichbarkeit zu anderen Pumpenbauarten ist somit nicht mehr gegeben.



**Bild 4.7:** Pumpengesamtwirkungsgrade nach Bauarten über dem Förderdruck [42]

Der Gesamtwirkungsgrad  $\eta_P$  nach Gleichung (4.11) setzt sich aus dem Produkt des volumetrischen Wirkungsgrades  $\eta_{vol}$  und des mechanischen Wirkungsgrades zusammen [43]. Der mechanische gemessene Wirkungsgrad  $\eta_{mech}$  wird zusätzlich in Relation zu der theoretisch unendlich dichten Pumpe gesetzt. Diese hätte das theoretische Fördervolumen  $\dot{V}_{geo}$ . Damit wird die Ausführungsgüte des Pumpenbaus berücksichtigt. Der volumetrische Wirkungsgrad, siehe Gleichung (4.12), beschreibt das Verhältnis zwischen dem effektiven Fördervolumenstrom zum geometrisch maximalen Fördervolumenstrom. Die Verluste, die aus der Differenz zwischen dem effektiven und theoretisch maximalen Fördervolumenstrom entstehen, werden auch als Leckverluste bezeichnet. Der mechanische Wirkungsgrad ist das Verhältnis zwischen hydraulischer Leistung am Förderdruckausgang  $P_{aus}$  der Pumpe und mechanischer Leistung an der Eingangswelle  $P_{ein}$ , wie Gleichung (4.13) zeigt. Die Eingangsleistung ist das Produkt aus Antriebsmoment  $T_A$  und Antriebsdrehzahl  $n_A$  an der Pumpe.

$$\eta_P = \eta_{vol} \cdot \eta_{mech} \quad (4.11)$$

$$\eta_{vol} = \frac{\dot{V}_{eff}}{\dot{V}_{geo}} \quad (4.12)$$

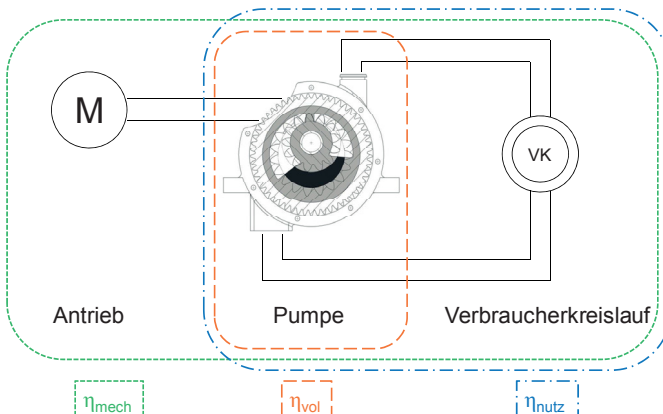
$$\eta_{mech} = \frac{P_{aus}}{P_{ein}} = \frac{\dot{V}_{eff} \cdot p_{eff}}{T_A \cdot n_A} \quad (4.13)$$

Beim Betrieb einer Pumpe tauchen zwei grundsätzliche entgegengesetzte Effekte am Gesamtwirkungsgrad auf. Im Wesentlichen sollen Pumpen unter den Betriebsbedingungen der jeweiligen Anwendungen eine Förderleistung bei geringer Antriebsleistung erzeugen. Das geometrische Fördervolumen einer Pumpe ist ein theoretischer Höchstwert zur Förderung, bei dem die Zahnlücken optimale Befüllung und Entleerung gewährleisten. Die Tatsache, dass jedoch bei höheren Förderdrücken nicht nur die Leckagewerte sondern auch die Gegenkräfte im Fluid ansteigen, verändern den volumetrischen Wirkungsgrad. So tritt bei steigender Temperatur folgender gegenläufiger Effekt auf. Während die Reibmomente aufgrund der niedrigeren Viskosität sinken und den mechanischen Wirkungsgrad erhöhen, sinkt der volumetrische Wirkungsgrad aufgrund höherer Leckverluste bei niedriger Viskosität.

Aus diesem Grund soll ein weiterer Wirkungsgrad, der sogenannte Nutzwirkungsgrad  $\eta_{\text{nutz}}$  (Gleichung (4.14)) für die Klassifizierung von Zahnradpumpen bezogen auf den Betriebszustand herangezogen werden. Dieser stellt das Verhältnis zwischen dem wahren Volumenstrom der Pumpe ohne Verbraucherbelastung und dem Volumenstrom mit entsprechender Verbraucherbelastung und Gegendruck im Verbraucherkreislauf VK in Bild 4.8 für eine Referenztemperatur dar.

$$\eta_{\text{nutz}} = \frac{\dot{V}(\Delta p, T_{\text{ref}})}{\dot{V}(p = 0, T_{\text{ref}})} \quad (4.14)$$

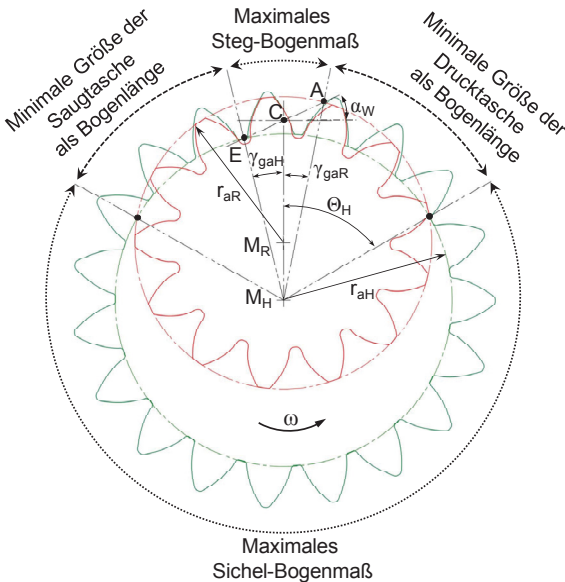
In Bild 4.8 werden die verschiedenen Wirkungsgrade des Fördervorgangs und seiner Baugruppen veranschaulicht.



**Bild 4.8:** Wirkungsgrade und deren Wirkbereiche

### 4.3 Geometrische Gestaltungsgrenzen der Innenzahnradpumpe

Um das Wirkungsprinzip der Innenzahnradpumpe durch die vier Abschnitte, die in Kapitel 3.1 über die Umsteuerpunkte definiert werden, zu gewährleisten, können gewisse konstruktive bauliche Grenzen dieser Abschnitte nicht über- bzw. unterschritten werden. Der Winkel  $\Theta_H$ , der den Schnittpunkt der beiden Kopfkreise des Ritzels und des Hohlrads von der Nullstellung des Hohlrades beschreibt, kann von der Sichel nicht vereinnahmt werden (Bild 4.9). Die Sichel würde ansonsten Ritzel und Hohlrad berühren und es würde Kollision auftreten. Somit kann die Sichel einen maximalen Bereich von  $(2\pi - 2\Theta_H)$  einnehmen. Der Steg soll die axiale Abdichtung einer abgeschlossenen Zahnücke und somit die Trennung von Druck- und Saugseite gewährleisten. Dies sollte an der Stelle passieren, an der das Volumenminimum der Zahnücke auftritt. Das maximale Bogenmaß von  $(\gamma_{gaH} + \gamma_{gaR})$  bewegt sich zwischen den beiden Linien, die über den Schnittpunkten zwischen der Eingriffslinie und dem Ritzel- bzw. Hohlradkopfkreis entstehen. Zwischen Sichel- und Stegbereich befinden sich die zur Füllung und Entleerung der Verzahnungslücken verantwortlichen Saug- und Drucktaschen. Diese können noch mit Anpassungs- oder Einlaufnuten versehen werden, um Druckanpassungen fließend zu gestalten. Diese Bereiche sind als minimale Größe der Drucktasche und der Saugtasche angegeben. Auf die Auslegungen der benannten Abschnitte wird in den einzelnen Kapiteln eingegangen.



**Bild 4.9:** Geometrische Grenzen zur Gestaltung von Innenzahnradpumpen



## 4.4 Strömungsgleichungen

Für nachfolgende Betrachtungen von Spaltströmungen im Inneren der Pumpen werden folgende Ansätze und Vereinfachungen dargelegt.

### 4.4.1 Grundgleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben das Gleichgewicht zwischen Trägheits-, Druck-, und Zähigkeitskräften in einer Strömung. Die Bedingung für laminare Strömung wird über die Reynoldszahl ( $Re < 2300$ ) sichergestellt [44]. In der Strömung auftretende Nichtlinearitäten wie Turbulenz-, Kompressibilitäts- und Impulseffekte können vernachlässigt werden, da in Zahnradpumpen nur kurze „Ölleitungen“ und somit geringe Ölströmungen vorliegen [45]. In allgemeiner Form lauten die Gleichungen multipliziert mit der Dichte wie folgt.

$$\rho \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad } p + \eta \cdot \Delta \vec{v} \quad (4.15)$$

Zur Beschreibung der Schubspannungen in Flüssigkeiten, die sich zwischen bewegenden Flächen befinden, wird das Newtonsche Schubspannungsgesetz angewendet:

$$\tau = \frac{F}{A} = \eta \frac{dv_x}{dy} \quad (4.16)$$

Weiterhin gilt die Kontinuitätsbedingung:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4.17)$$

Die Lösung der Gleichung (4.15) wird unter folgenden Vereinfachungen hergeleitet:

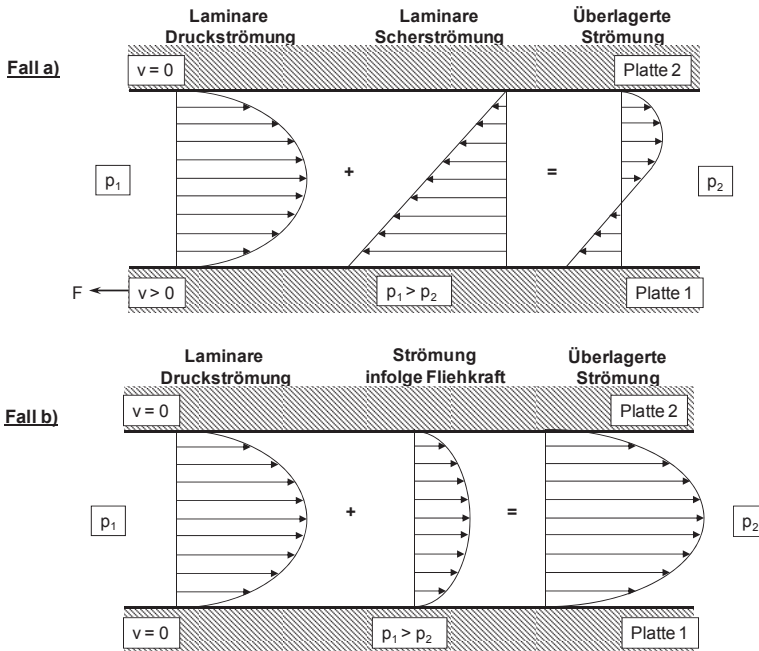
- Keine Strömungen in Spaltbreitenrichtung ( $\partial z=0$ )
- Keine Strömungen und Druckunterschiede in y-Richtung, da der Einfluss vernachlässigbar gegenüber denen in x-Richtung ist ( $\partial y=0$ )
- Keine Gravitationskräfte, zulässig sind jedoch Strömungsanteile durch Fliehkräfte
- Annahme einer stationären Strömung ( $\partial t=0$ )
- Vernachlässigung von Trägheitskräften (laminare Strömung)

Die Vereinfachungen führen zur verkürzten Navier-Stokes-Gleichung, wobei der Index  $yx$  der Schubspannung die Richtung  $x$  über der Spalthöhe  $y$  darstellt.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (4.18)$$

#### 4.4.2 Strömungen in Innenzahnpumpen

In Innenzahnpumpen kommen in Spalten Druckströmungen, Scherströmungen und Strömungen infolge Fliehkräfte vor. Manche Strömungsformen treten meistens nur im Idealfall einzeln auf. In der Realität herrschen vorwiegend mehrere Strömungsformen gleichzeitig, wodurch sich eine Überlagerung der verschiedenen Strömungsformen einstellt. Auch in Zahnradpumpen tritt der Fall ein, dass gleichzeitig Druck- und Scherströmungen bzw. Strömungen infolge Fliehkräfte entstehen, die sich dann zu einer überlagerten Strömungsform ausbilden.



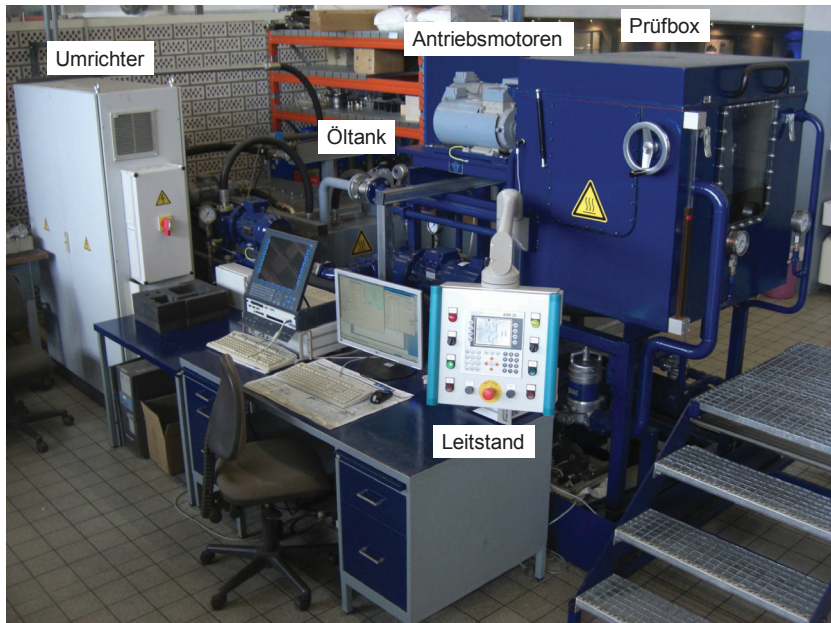
**Bild 4.10:** Geschwindigkeitsverteilung überlagelter Strömungsformen

In Bild 4.10 ist im Fall a) eine Überlagerung einer Druckströmung mit einer Schleppströmung und im Fall b) eine Überlagerung einer Druckströmung mit einer durch Fliehkraft erzeugten Strömung über das Superpositionsprinzip abgetragen. Die laminare Druckströmung resultiert aus der Druckdifferenz in den Spalten, die Schleppströmung resultiert aus den Relativbewegungen zwischen der Gehäusewand und den Zahnrädern. Fliehkraftströmungen treten dort auf, wo das Medium in den Spalten zusätzlich zum Druckgradienten durch die auftretende Fliehkraft der Drehbewegung zum Strömen angeregt wird.

## 5 Versuchsausstattung

### 5.1 Prüfstand

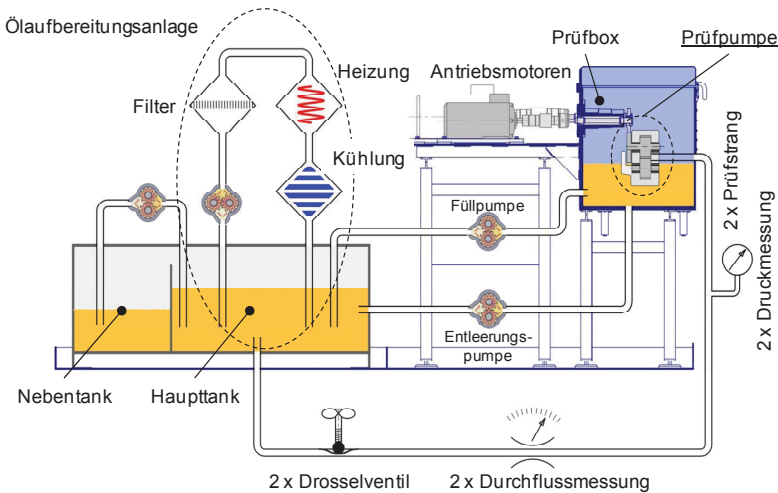
Unterschiedliche Förderpumpentypen und unterschiedliche Förderpumpenleistungen können am Universellen Zahnradpumpenprüfstand (UZP) untersucht werden. In Bild 5.1 erkennt man die Antriebsmotoren, die Prüfbox, den Leitstand, den Umrichter und den Öltank des Prüfstands.



**Bild 5.1:** Universeller Zahnradpumpenprüfstand

#### 5.1.1 Aufbau und Leistungsdaten

Der UZP hat die Länge 4700 mm, Breite 1800 mm und Höhe 2100 mm. In Bild 5.2 ist ein Funktionsschema zum UZP, das teilweise als Schnitt (Prüfbox mit Prüfpumpe und Antriebsmotoren) und teilweise über die wichtigsten hydraulischen Unterfunktionen der Ölkreisläufe (Füllpumpe, Entleerungspumpe und Messkreisläufe) sowie der Komponenten der Ölaufbereitungsanlage (Filter, Heizung und Kühlung) dargestellt ist.



**Bild 5.2:** Schnittdarstellung des universellen Zahnradpumpenprüfstandes

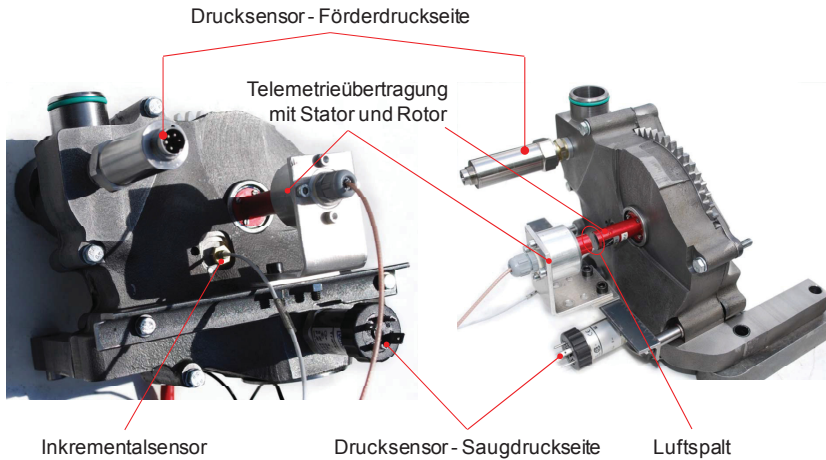
Der Haupttank und der Nebentank fassen ca. 1100 l. Es wird vom Nebentank nur so viel Öl in den Haupttank gepumpt, wie für die Prüfung der entsprechenden Pumpe benötigt wird. Dadurch muss nur die passende Prüfmenge für den Prüflauf im Haupttank über die Ölaufbereitungsanlage aufbereitet werden. Das Öl kann dort gefiltert, geheizt oder gekühlt werden und wird zusätzlich auf Partikel über 0,02 mm gefiltert. Der Regelbereich der Öltemperatur liegt zwischen 30..90 °C. Es sind zwei Antriebsmotoren am Prüfstand angebracht. Motor<sub>1</sub> liefert dabei Antriebsdrehmomente von bis zu 120 Nm bei einer maximalen Drehzahl von 2800 min<sup>-1</sup>, während Motor<sub>2</sub> den höheren Drehzahlbereich bis 5800 min<sup>-1</sup> bei einem maximalen Drehmoment von 25 Nm abdeckt. Die eingesetzten Prüfpumpen können je nach Leistungsbereich und Versuchsziel an zwei verschiedene Prüfstränge angeschlossen werden. Die Prüfstränge führen das von der Prüfpumpe geförderte Öl zurück in den Haupttank. Der Druck und der Durchfluss werden von der Messtechnik erfasst. Über ein Drosselventil kann der entsprechende Druck im Prüfstrang eingestellt werden und somit der Verbraucher simuliert werden. Prüfstrang<sub>1</sub> kann bedingt durch den Querschnitt und die Messtechnik Drücke bis 40 bar und eine Durchflussmenge von 160 l/min erfassen. Im Prüfstrang<sub>2</sub> werden bei einem maximalen Druck von 40 bar Durchflussmengen bis 440 l/min messbar. Die Füllpumpe schließt den Kreislauf im Fördervorgang und führt das von der Prüfpumpe geförderte Öl wieder zurück in die Prüfbox. Dort können verschiedene Ansaugverhältnisse sowie unterschiedliche Ölstände simuliert werden. Nach Beendigung der Prüfung wird das noch in der Prüfbox enthaltene Öl über eine Entleerungspumpe zurück in den Haupttank gefördert. Bei leerer Prüfbox können Prüfpumpen und Prüfvorrichtungen entnommen werden.

Der hydraulische Schaltplan und die wichtigsten Daten des Prüföls sind im Anhang A1 aufgeführt.

## 5.2 Messtechnik

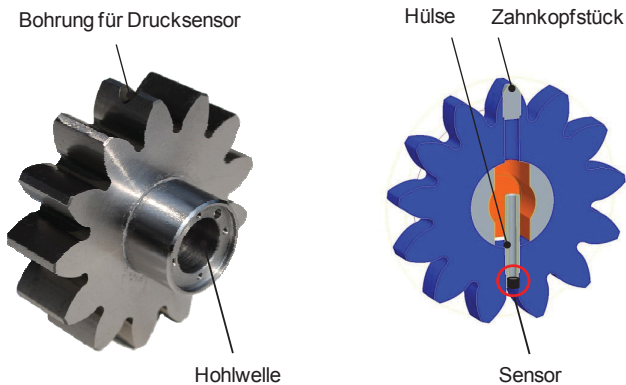
### 5.2.1 Drucksensoren in der Pumpe

Um das Verhalten der Pumpe während des Betriebs zu erfassen, werden mehrere Sensoren an der Zahnradpumpe installiert (siehe Bild 5.3). Um eine Aussage über die Pulsationen und Druckwechselvorgänge im Inneren der Pumpe zu erhalten, ist es notwendig den Förderdruck und seine Pulsation zu messen. Zur Erfassung dieser Absolutdrücke in den Druck- bzw. Saugtaschen werden piezoresistive Sensoren verwendet. Dabei kann der verwendete Sensor im Saugraum zur Absolut- oder zur Relativdruckmessung genutzt werden. Des Weiteren gibt eine Erfassung des Drucks innerhalb einer Zahnücke Aufschluss darüber, welche Druckänderungsgeschwindigkeiten auftreten und ob ungewollte Druckspitzen und Druckanstiege vorhanden sind, die es zu vermeiden gilt. Für die Erfassung des Drucks in einer Zahnücke während einer kompletten Umdrehung ist im Zahnfuß ein Miniaturdruckaufnehmer verbaut. Die Daten des Sensors werden mit der Kabelverbindung an den an der Welle angebrachten Rotor übermittelt. Dieser überträgt mittels Telemetrie die Signale über einen Luftspalt an den am Gehäuse angebrachten Stator. Der Stator ist mit dem Verstärker und der Auswerteeinheit verbunden. Der Miniaturdrucksensor wird mit einer Frequenz von 20 kHz abgetastet. Damit ergibt sich bei der höchsten Versuchsdrehzahl von  $4380 \text{ min}^{-1}$  am Ritzel eine Winkelauflösung von  $1,3^\circ$  pro Abtastpunkt. Die Telemetrieübertragung ist bis Drehzahlen von  $50.000 \text{ min}^{-1}$  ausgelegt. Bei Temperaturveränderungen von  $20^\circ\text{C}$  ausgehend, muss der Nullpunkt nachkorrigiert werden, um die Nullpunktsdrift von  $0,02\% / ^\circ\text{C}$  zu berücksichtigen. Der Stator und der Rotor sind coaxial auszurichten, so dass der Luftspalt ca. 10 mm beträgt. Der Aufbau der Telemetrieübertragung muss frei sein von hochfrequenten Störsignalen, die z.B. vom Frequenzumrichter des Antriebsmotors oder von Magnetfeldern der Anlage stammen, um das Messsignal nicht zu verfälschen. Um dem Druckverlauf in der Zahnücke eine Winkelstellung des Zahnrades zu zuordnen, wird an der genau gegenüberliegenden Stelle zum Zahneingriff ( $0^\circ$ -Winkelstellung der Umdrehung) ein Inkrementalsensor angebracht. Damit können die Null-Durchgänge der Zähne und die Winkelstellung des Signals über die gemessene Drehzahl erfasst werden. Dieser wird ebenfalls mit einer Abtastfrequenz von 20 kHz erfasst, so dass zwei aufeinander folgende Zähne bei der höchsten Drehzahl von 14 Messpunkten erfasst werden.



**Bild 5.3:** Gehäuse mit Drucksensoren, Telemetrie und Inkrementalsensor

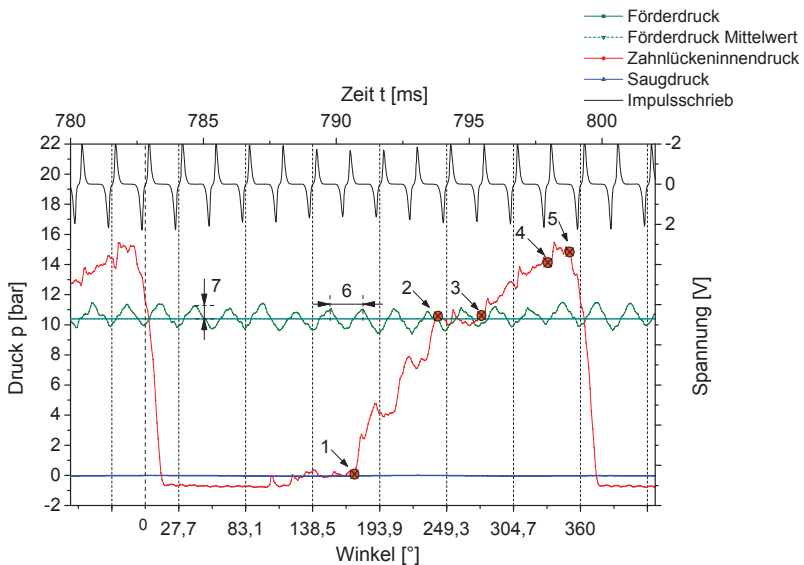
Der Miniaturdruckaufnehmer wird über eine Hülse im Zahnfuß des Ritzels montiert (Bild 5.4.) Um die Montage zu ermöglichen, wird eine Bohrung durch das komplette Zahnrad gefertigt. Der dadurch im Zahnkopf erhaltene Ausschnitt wird durch ein entsprechend geformtes Zahnkopfstück wieder verschlossen. Die Verkabelung des Sensors wird über die Hohlwelle zum Rotor geführt. Bild 5.4 zeigt das Zahnrad und eine Schnittansicht mit dem verbauten Sensor.



**Bild 5.4:** Einbau des Miniaturdruckaufnehmers in das Ritzel

### 5.3 Auswertungsdarstellungen

Die Messwertaufnahme wird für die in Bild 5.3 dargestellten Sensoren getrennt von den anderen Messungen vorgenommen. Ein Messschrieb zeichnet den Saug- und den Förderdruck, den Zahnlückenninnendruck des Miniaturdruckaufnehmers und den Impulsschrieb des Inkrementalsensors auf. Daraus können wichtige Messpunkte zur Auswertung und Klassifizierung der Pumpe entnommen werden. Der Messschrieb wird dabei über der Zeit (relativ) und über dem Winkel dargestellt. Eine Umdrehung des Zahnrads kann über den Inkrementalsensor dem Druckverlauf über eine Umdrehung zugewiesen werden. Der Impulsschrieb des Inkrementalsensors wird zur Winkelstellung des Ritzels korreliert. In Bild 5.5 wird ein Messschrieb dargestellt, an dem sieben wichtige Punkte zur Auswertung eingetragen sind.



**Bild 5.5:** Beispielhafter Messschrieb der Druckverläufe

Die zur Auswertung des Messsignals genutzten Punkte (1 – 7) und deren Benennung zeigt Tabelle 5.1.

In der Druckaufbauzone (Messpunkte 1 – 2) wird der Druck über Leckagespalte an den Förderdruck angepasst. Die Kompressionspulsation ist vor allem in den Treppentufen erkennbar, die durch die geometrische Anpassung an das Förderdruckniveau der einzelnen Zahnlücken erzeugt werden. Es ist wichtig eine gemäßigte Druckerhöhung in der Pumpe zu erreichen, um Druckschwankungen zu vermeiden.

Bereits vor dem eigentlichen Zahneingriff erhöht sich der Druck innerhalb der Zahnkammer (Punkte 3 – 4) durch das berührungslose Ineinandergreifen der Zahnräder. Dieser Druckanstieg ist unerwünscht und bringt ein bereits erhöhtes Niveau mit sich, das den Quetschöldruck (Punkt 5) beim Zahneingriff weiter ansteigen lässt. Vor allem Geräuschanregungen und erhöhte Lagerbelastungen resultieren aus dem Quetschöldruck in der Verzahnung. Die geometrische Pulsation im Förderdruckbereich lässt sich in den Punkten 6 und 7 erkennen. Die Frequenz (Punkt 6) und die Amplitude (Punkt 7) der Pulsation werden hauptsächlich durch die Geometrie der Verzahnung, Kompressionspulsationsanteile und Leckölpulsationsanteile bestimmt und ergeben sich aus der Abhängigkeit der Volumenstrompulsation. Die Auswertungen selbst finden in den Kapiteln 6 - 8 über die oben genannten Messpunkte statt.

**Tabelle 5.1:** Auswertung der Messschriebe

<b>Messpunkt</b>	<b>Einheit</b>	<b>Zeichen</b>	<b>Bezeichnung</b>
1 – 2	°	Winkel DAB	Beginn und Ende des Druckaufbaubereichs
3 – 4	°	Winkel EB	Beginn und Ende der Druckerhöhung im Eingriffsbereich
4	bar	$p_v$	Wert der Druckerhöhung im Eingriffsbereich
5	bar	$p_Q$	Maximaler Druck in der Zahnücke
6	s <sup>-1</sup>	$f_D$	Frequenz Förderdruck
7	bar	$\Delta p$	Amplitude Förderdruck

## 5.4 Versuchsprogramm

Die Untersuchungen werden unter verschiedenen Betriebsparametern durchgeführt. Tabelle 5.2 zeigt die Variationsbereiche der Einflussgrößen. Die Drehzahl der Pumpe wird im geforderten Antriebsbereich der zur Verfügung stehenden Pumpen über sechs Stufen variiert, während der Druck ebenfalls in sechs Niveaustufen bis auf den Betriebsdruck von 12 bar variiert wird. Mit der Temperatur des Öls kann dessen Viskosität verändert werden. Alle Versuchsvarianten werden einmal bei 30 °C (Raumtemperatur) und einmal bei 80 °C (maximale Betriebstemperatur der Pumpen) durchgeführt. Dies umfasst den Temperaturbereich für die Anwendungen der Versuchspumpen. Auf die besonderen Einzelheiten und Variationsmöglichkeiten der Versuchspumpen wird in den einzelnen Kapiteln eingegangen.

**Tabelle 5.2:** Variationsstufen des Versuchsprogramms

<b>Einflussgröße</b>	<b>Formelzeichen</b>	<b>Einheit</b>	<b>Variationen</b>
<i>Drehzahl Pumpe</i>	$n_H$	min <sup>-1</sup>	750 ; 1100 ; 1500 ; 2000 ; 2500 ; 3000
<i>Förderdruck</i>	$p_D$	bar	0 ; 3 ; 5 ; 8 ; 10,5 ; 12
<i>Temperatur</i>	T	°C	30 ; 80

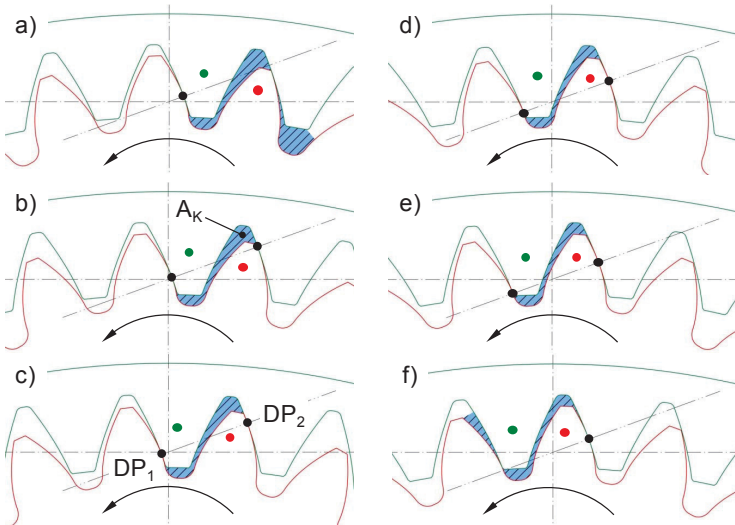


## 6 Optimierung des dichtenden Eingriffs

### 6.1 Grundlagen

Wie in den Grundlagen in Kapitel 4 beschrieben wird, bildet der Steg die axiale Trennkante zwischen der Druck- und der Saugseite beim Umsteuervorgang während der Verdrängung. Der Steg muss so gestaltet sein, dass das zwischen den zwei Dichtpunkten  $DP_1$  und  $DP_2$  eingeschlossene, schraffierte Volumen (siehe Bild 6.1 b bis e) sein Minimum erreicht hat.

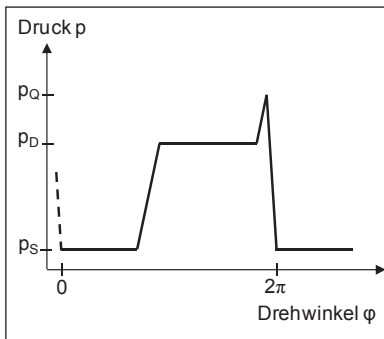
Bild 6.1 zeigt den Verdrängungsvorgang mit dichtendem Eingriff in sechs Stellungen. Solange bei a) noch kein zweiter Dichtpunkt erreicht ist, kann das Fluid aus der Zahnücke in radialer Richtung durch den Spalt zwischen den Zahnücken entweichen. Zwischen Bild 6.1 b) bis e) kann nur noch eine Verdrängung des Mediums in axialer Richtung aus dem eingeschlossenen Volumen erfolgen, bis das schraffierte Volumen sein Minimum erreicht hat. Der Steg im Gehäuse muss dazu die axiale Anbindung an den Druckraum bieten. Im Zustand f) öffnet sich das eingeschlossene Volumen bereits wieder zur Saugseite und beginnt durch die Volumenvergrößerung dort mit dem Ansaugvorgang. Die Drehpfeile der Bildteile a) bis f) symbolisieren die Drehbewegung des Ritzels und des Hohlrads, angetrieben wird jedoch über die Hohlradverzahnung.



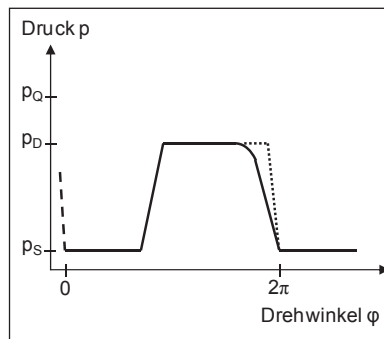
**Bild 6.1:** Strömungsvorgänge während des Zahneingriffs

Aus dem Verdrängungsvorgang heraus ist es notwendig, den Verlauf des eingeschlossenen Verzahnungsvolumens exakt zu bestimmen. Aus dem Stand der Technik (Kapitel 2) geht hervor, dass sich das eingeschlossene Volumen symmetrisch zwischen dem Beginn und dem Ende des Eingriffs aufteilt. Des Weiteren würde daraus folgen, dass der Anfang des Stegs und das Ende des Stegs symmetrisch zum Wälzpunkt zu gestalten ist und zwar im Abstand von einer halben Eingriffsteilung bei Verzahnung mit Flankenspiel bzw. im Abstand von einer viertel Eingriffsteilung bei Verzahnung ohne Flankenspiel. Diese Aussagen stimmen jedoch nur für symmetrische Verzahnungen mit identischen Rädern wie bei Außenzahnradpumpen. Die Regeln werden über das Einsetzen von Innenverzahnungsdaten wie z.B. der negativen Hohlradzähzahl leider vorschnell auf Innenzahnradpumpen übertragen, mit dem Resultat falsche Steggestaltungen zu erhalten. Es gilt nun die Stegbegrenzungsmaße für hohlradgetriebene Innenzahnradpumpen neu herzuleiten und verbesserte Konstruktionsregeln für die Stegmaße bei Innenzahnradpumpen bereit zu stellen.

Bei einer Fehlanpassung der Stegmaße können in der Zahnkammer während des Umsteuervorgangs unerwünschte Spitzendrücke (siehe Bild 6.2 a)) auftreten. Wenn der Steg zu breit gestaltet wird, ergeben sich hohe Druckspitzen am Ende des Verdrängungsvorgangs, die einen höheren Schallpegel und größere Kräfteanregungen in Form von Druckwechselkräften nach sich ziehen. Bei einem zu schmalen Steg entsteht eine Verbindung zwischen der Druck- und Saugseite. Man spricht dabei vom hydraulischen Kurzschluss [8], wie Bild 6.2 b) zeigt. Die Folgen davon sind Rückförderungen vom Druckraum in den Saugraum und ein schlechterer Wirkungsgrad.



a) Quetschölspitzendruck



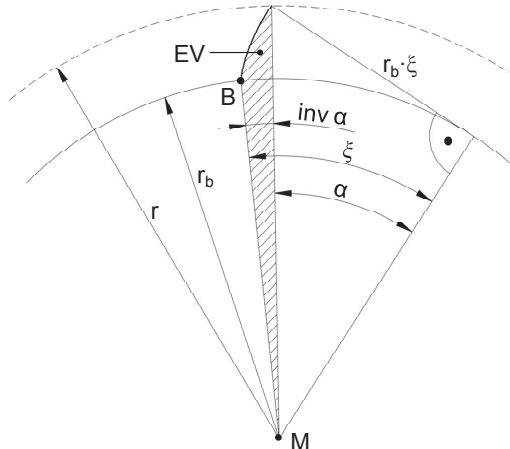
b) Hydraulischer Kurzschluss

**Bild 6.2:** Abweichungen des Druckverlaufs in der Zahnkammer vom Idealfall

Richter [14] verweist mit seinem Ansatz aus dem Energiesatz zur Volumenberechnung darauf, dass der zeitlich abhängige Förderstrom  $dV/dt$  nicht berechnet werden kann. Aus diesem Grund wird ein rein geometrisches Berechnungsverfahren zur Ermittlung des in der Verzahnung eingeschlossenen Volumens während des Eingriffs herangezogen. Dabei muss jedoch wieder zwischen dem Fall der spielbehafteten Verzahnung und der spielfreien Verzahnung unterschieden werden, da sich die eingeschlossenen Volumina unterschiedlich hinsichtlich ihres Volumenverlaufs während des Eingriffs verhalten.

Um das Volumen im Zahneingriff berechnen zu können, sind vor allem die Flächenberechnungen unterhalb der Evolventenkurven zu erfassen. Die in dieser Arbeit verwendeten Verzahnungen sind immer geradzahnt. Somit kann das Volumen einer Verzahnung über die Multiplikation einer Stirnschnittfläche mit der Verzahnungsbreite erhalten werden. Die Gleichungen können somit auf ein ebenes Problem zurückgeführt werden. Die Berechnung des eingeschlossenen Volumens zwischen den Verzahnungen gibt einerseits Aufschluss über das Quetschölverhalten der Verzahnung und lässt daraus folglich auf die Auslegung von Stegmaßen schließen.

Die Funktion zur Bestimmung der Fläche unterhalb der Evolventenkurve lässt sich mit den Grundgeometrien zur Evolvente nach Bild 6.3 herleiten. In der Verzahnungstechnik ist es üblich die Geometrie der Fläche in Abhängigkeit zum Mittelpunkt zu betrachten [48].



**Bild 6.3:** Entstehung der Fläche unterhalb der Evolventenfunktion

Mit der am Grundkreisradius anliegenden Tangente der Länge  $r_b \cdot \xi$  und den Radien  $r_b$  und  $r$  kann das rechtwinklige Dreieck gebildet werden, aus dem sich folgende Beziehung ableiten lässt.

$$r^2 = r_b^2 \cdot (1 + \xi^2) \quad (6.1)$$

Die Involutfunktion nach Gleichung (6.2) beschreibt den Winkel zwischen der Linie, die vom Mittelpunkt M bis zum Basispunkt B der Evolvente liegt und der Linie, die ebenfalls vom Mittelpunkt M bis zu einem beliebig erzeugten Punkt auf der Evolvente führt.

$$\text{inv } \alpha = \xi - \arctan \xi \quad (6.2)$$

Die Ableitung der Involutfunktion führt zu Gleichung (6.3), die später passend genutzt werden kann.

$$d(\text{inv } \alpha) = \frac{\xi^2}{1 + \xi^2} d\xi \quad (6.3)$$

Zur Bestimmung der Fläche EV unter der Kurve in Bild 6.3 wird die allgemeine mathematische Gleichung der Kreissektorfläche herangezogen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \varphi \quad (6.4)$$

Gleichung (6.4) und die abgeleitete Involutfunktion der Gleichung (6.3) führen zur allgemeinen Evolventengleichung (6.5) für den Flächeninhalt EV unterhalb der Evolvente.

$$EV = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\text{inv } \alpha} r^2 \cdot d(\text{inv } \alpha) \quad (6.5)$$

Mit dem Ersatz des Winkelinkrements des Involuts  $\alpha$  der Gleichung (6.3) und der Beziehung aus Gleichung (6.1) kann die Integration über den Winkel  $\xi$  nach Gleichung (6.6) erfolgen:

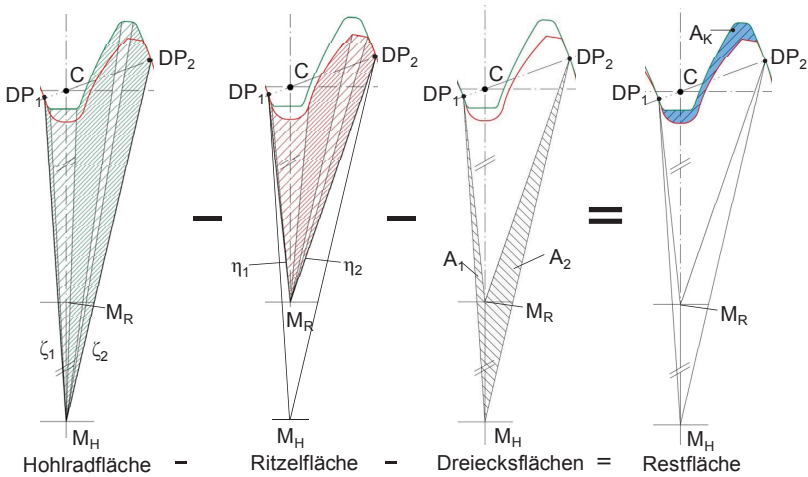
$$EV = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\xi} (r_b^2 \cdot \xi^2) d\xi = \frac{1}{6} \cdot r_b^2 \cdot \xi^3 \quad (6.6)$$

Der Winkel  $\xi$  kann mit Hilfe der Gleichung (6.1) in Gleichung (6.6) ersetzt werden, um die Fläche EV abhängig vom Radius  $r_b$  und dem allgemeinen Radius  $r$  ausdrücken zu können.

$$EV = \frac{1}{6} \cdot r_b^2 \cdot \left( \frac{r^2}{r_b^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (6.7)$$

## 6.2 Volumenverlauf für Verzahnungen mit Flankenspiel

Bei einer Verzahnung mit Flankenspiel ergeben sich die Definitionsgrenzen über den Beginn und das Ende des dichtenden Eingriffs nach Kapitel 4.1. Die Differenzfläche  $A_K$  zwischen Hohlrad- und Ritzelzahnkontur innerhalb der Dichtpunkte  $DP_1$  und  $DP_2$ , in der sich das Medium befindet, soll anhand von Bild 6.4 definiert werden. Man erhält diese Fläche, in der sich das Medium während des dichtenden Eingriffs befindet, durch Subtraktion der Ritzelfläche und der Dreiecksflächen zwischen den Mittelpunkten und den Dichtpunkten von der Hohlradfläche (Bild 6.4). Die Herleitungen der einzelnen Flächen sowie die Abhängigkeit der Flächen vom zuvor definierten Drehwinkel  $\gamma$  sind im Anhang A2 enthalten.



**Bild 6.4:** Verfahren zum Erhalt der Restfläche  $A_K$  im Eingriffsbereich

Die Ritzel und die Hohlradfläche gliedern sich wie folgt:

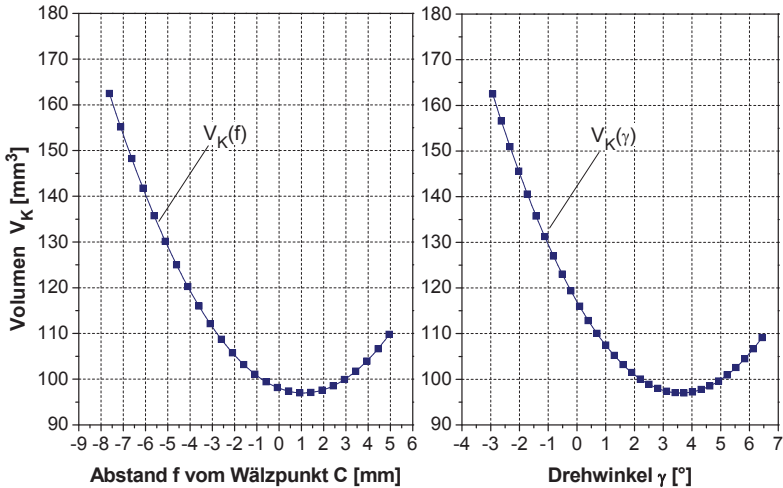
$$\begin{aligned}
 A_{\text{Ritzel}} = & \frac{1}{6} \cdot r_{bR}^2 \cdot \left( \frac{r_{wR}^2 + (t_e - f)^2 - 2 \cdot r_{wR} \cdot (t_e - f) \cdot \cos(\pi/2 - \alpha_w)}{r_{bR}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \\
 & \frac{1}{6} \cdot r_{bR}^2 \cdot \left( \frac{r_{wR}^2 + f^2 - 2 \cdot r_{wR} \cdot f \cdot \cos(\pi/2 + \alpha_w)}{r_{bR}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \\
 & \frac{1}{3} \cdot r_{bR}^2 \cdot \left( \frac{r_{aR}^2}{r_{bR}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot e_{fFR} \cdot r_{bR} - \frac{\pi}{8} \cdot e_{fFR}^2 + \frac{1}{2} \cdot s_{aR} \cdot r_{aR}
 \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}
A_{\text{Hohlrad}} = & \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bH}}^2 \cdot \left( \frac{r_{\text{wH}}^2 + (t_e - f)^2 - 2 \cdot r_{\text{wH}} \cdot (t_e - f) \cdot \cos(\pi/2 - \alpha_w)}{r_{\text{bH}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \\
& \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bH}}^2 \cdot \left( \frac{r_{\text{wH}}^2 + f^2 - 2 \cdot r_{\text{wH}} \cdot f \cdot \cos(\pi/2 + \alpha_w)}{r_{\text{bH}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \\
& \frac{1}{3} \cdot r_{\text{bH}}^2 \cdot \left( \frac{r_{\text{fH}}^2}{r_{\text{bH}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \cdot r_{\text{bH}}^2 \cdot \left( \frac{r_{\text{aH}}^2}{r_{\text{bH}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot s_{\text{aH}} \cdot r_{\text{aH}} + \frac{1}{2} \cdot s_{\text{fH}} \cdot r_{\text{fH}}
\end{aligned} \quad (6.9)$$

Das Restvolumen im Eingriff  $V_K$  zwischen den Verzahnungen erhält man durch Multiplikation der Differenzfläche  $A_K$  mit der Verzahnungsbreite  $b$ . Zudem wird der Abstand  $f$  durch den Drehwinkel  $\gamma$  substituiert.

$$V_K = (A_{\text{Hohlrad}} - A_{\text{Ritzel}} - A_1 - A_2) \cdot b = A_K \cdot b \quad (6.10)$$

Ein berechneter Volumenverlauf für eine Verzahnung kann nun über den Abstand  $f$  des Dichtpunkts  $DP_2$  zum Wälzpunkt C oder den Winkel  $\gamma$  ausgegeben werden (Bild 6.5).



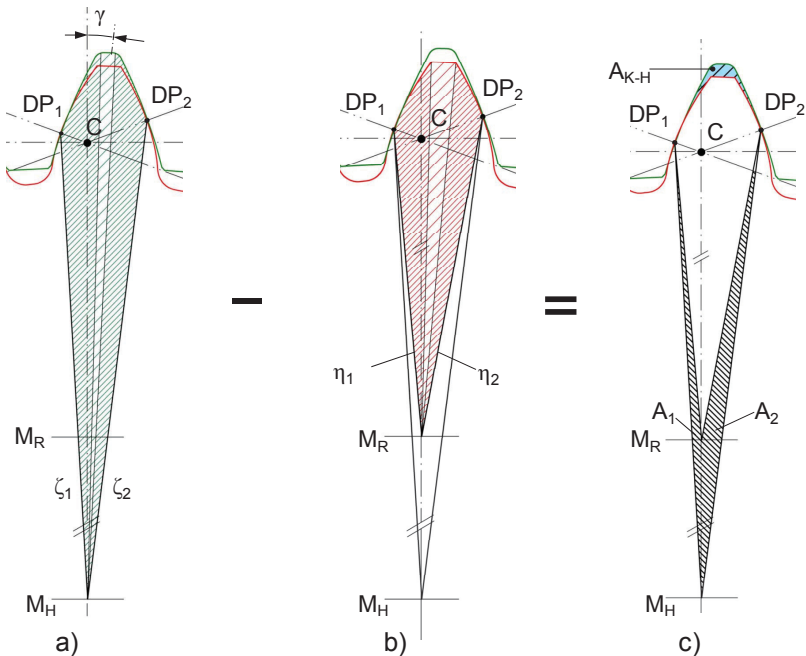
**Bild 6.5:** Volumenverlauf  $V_K$  über dem Abstand  $f$  bzw. Winkel  $\gamma$

### 6.3 Volumenverlauf für Verzahnungen ohne Flankenspiel

Bei einer spielfreien Verzahnung muss unterschieden werden, dass es nicht immer nur einen zusammenhängenden Dichtraum gibt. Es können sich mehrere Dichträume ausbilden. Bei den Betrachtungen ist zusätzlich zu unterscheiden, ob es sich um eine Hohlradlücke  $A_{K-H}$  (Bild 6.6 c)) oder um eine Ritzellücke  $A_{K-R}$  (Bild 6.7 c)) handelt. Die Definitionsgrenzen sind somit für die einzelnen Lücken unterschiedlich (siehe Kapitel 4.1.2).

Das geometrische Verfahren wird hierbei analog dem Verfahren einer Verzahnung mit Flankenspiel angewandt.

Es werden in Bild 6.6 die Parameter  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  und  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  für die Berechnung der Fläche  $A_{K-H}$  (Hohlradlücke) sichtbar. Die Abstände  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ , und  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  sind vom Drehwinkel  $\gamma$  abhängig.



**Bild 6.6:** Berechnung der Restfläche in einer Hohlradlücke

Für eine Hohlradlücke gelten die einzelnen Teilflächen nach Bild 6.6:

- Schraffierte Hohlradfläche a)

$$A_{\text{Hohlrad1}} = \frac{1}{3} \cdot r_{\text{bH}}^2 \cdot \left( \frac{r_{\text{fH}}^2}{r_{\text{bH}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bH}}^2 \cdot \left( \frac{\zeta_2^2}{r_{\text{bH}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bH}}^2 \cdot \left( \frac{\zeta_1^2}{r_{\text{bH}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot s_{\text{aH}} \cdot r_{\text{aH}} \quad (6.11)$$

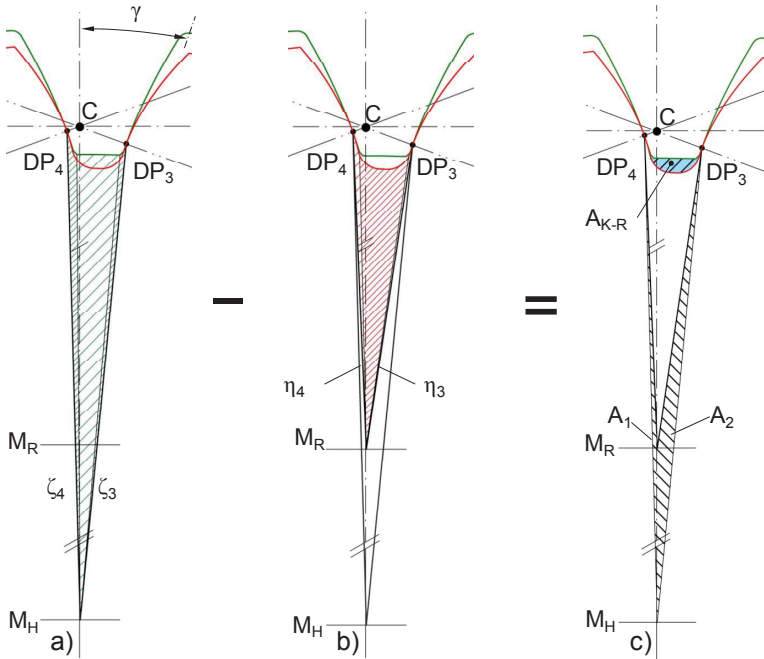
- Schraffierte Ritzelfläche b)

$$A_{\text{Ritzel1}} = \frac{1}{3} \cdot r_{\text{bR}}^2 \cdot \left( \frac{r_{\text{aR}}^2}{r_{\text{bR}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bR}}^2 \cdot \left( \frac{\eta_2^2}{r_{\text{bR}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bR}}^2 \cdot \left( \frac{\eta_1^2}{r_{\text{bR}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot s_{\text{aR}} \cdot r_{\text{aR}} \quad (6.12)$$

Wie bei der Verzahnung mit Flankenspiel müssen noch die verbleibenden Dreiecksflächen  $A_1$  und  $A_2$  nach Bild 6.6 c) subtrahiert werden, um auf die verbleibende Restfläche in der Verzahnung schließen zu können. Diese können analog den Gleichungen aus dem Anhang A2 berechnet werden.

Eine Ritzellücke definiert sich durch den Hohlradzahn, der sich in einer Ritzellücke befindet und über die Berührungspunkte an der Vorder- und der Rückflanke der Evolventen abgedichtet wird (Bild 6.7).



**Bild 6.7:** Bestimmung der Restfläche in der Ritzellücke

Für eine Ritzellücke gelten die Teilflächen nach Bild 6.7:

- Schraffierte Hohlradfläche a)

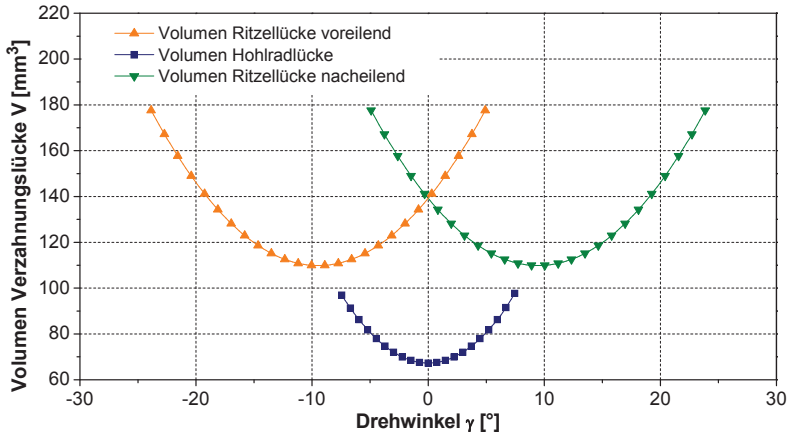
$$A_{\text{Hohlrad2}} = \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bH}}^2 \cdot \left( \frac{\zeta_3^2}{r_{\text{bH}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bH}}^2 \cdot \left( \frac{\zeta_4^2}{r_{\text{bH}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \cdot r_{\text{bH}}^2 \cdot \left( \frac{r_{\text{aH}}^2}{r_{\text{bH}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (6.13)$$

- Schraffierte Ritzelfläche b)

$$A_{\text{Ritzel2}} = \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bR}}^2 \cdot \left( \frac{\eta_3^2}{r_{\text{bR}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bR}}^2 \cdot \left( \frac{\eta_4^2}{r_{\text{bR}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot e_{\text{bR}} \cdot r_{\text{bR}} - \frac{\pi}{8} \cdot e_{\text{bR}}^2 \quad (6.14)$$

Es können sich bei gewissen Zahnstellungen bis zu drei Dichträume gleichzeitig ausbilden. Dabei können bis zu zwei Hohlradlücken und eine Ritzellücke im Eingriff sein. Die gemäß den Definitionen aus Kapitel 4.1.3 voreilende Ritzellücke vor der betrachteten Hohlradlücke ist identisch zur nacheilenden und kann somit über den betrachteten Drehwinkel  $\gamma$  über die Ritzelteilung verschoben werden.

Ein berechneter Verlauf über den Winkel  $\gamma$  zeigt dabei Bild 6.8 als Beispiel. Leider lässt sich der Verlauf nicht über den Abstand  $f$  vom Wälzpunkt C darstellen, da es bei drei Dichträumen auch drei unterschiedliche Abstände  $f$  gibt.



**Bild 6.8:** Volumenverläufe der Ritzellücke voreilend, Hohlradlücke und Ritzellücke nacheilend

Im weiteren Verlauf werden die errechneten Stegmaße und Optimierungsvorgänge für eine Verzahnung mit Flankenspiel als Basis betrachtet. Aufgrund der unterschiedlichen herrschenden Drehzahl- und Druckbedingungen in einer Pumpenverzahnung kann nicht ausgeschlossen werden, dass sich ein Betriebspunkt einstellt, der die Pumpenräder soweit ineinander schiebt, dass eine Berührung der Rückflanken auftritt und somit die Verzahnung ohne Spiel ist. Bei der Zahnradauslegung wird keine zu enge Passung gewählt, da man der Gefahr des Klemmens vorbeugt und somit Verschleiß vermeidet. Außerdem führen die unterschiedlich auftretenden Minima einer einzelnen Ritzel- und Hohlradlücke zu unterschiedlichen Stegabmaßen, so dass hier immer das längste erforderliche Maß gewählt werden müsste.

Wie aus der Literatur zu entnehmen ist, ist es hingegen sinnvoller für den Fall des spielfreien Eingriffs sogenannte Entlastungsnuten im Steg vorzusehen [8, 25]. Diese sind jedoch nicht bei einem Viertel der Eingriffsteilung als Maß vorzusehen, wie aus dem Stand der Technik hervorgeht, sondern über das dargelegte Berechnungsverfahren den praxisnahen Verhältnissen exakt anpassbar.

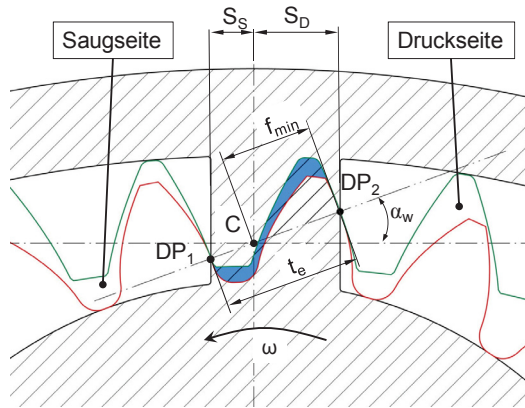
## 6.4 Erkenntnisse und Folgen für die Steggestaltung

Die Stegmaße werden aus den berechneten Verläufen des eingeschlossenen Volumens abgeleitet. Die Stegmaße  $S_S$  und  $S_D$  erfolgen aus dem Betriebseingriffswinkel  $\alpha_w$  und  $f_{\min}$  nach Bild 6.9. Dabei ist es nötig den Verlauf des eingeschlossenen Volumens auf relative bzw. absolute Minima zu prüfen. Das Stegmaß als Fertigungsmaß lässt sich für eine Verzahnung mit Flankenspiel indirekt aus Gleichung (6.10) über den Abstand  $f_{\min}$  ableiten, an dem das abgedichtete Volumen  $V_K$  minimal wird (Bild 6.5).

Das Stegmaß auf der Druckseite  $S_D$  und das Stegmaß auf der Saugseite  $S_S$  werden berechnet zu:

$$S_D = f_{\min} \cdot \cos(\alpha_w) \quad (6.15)$$

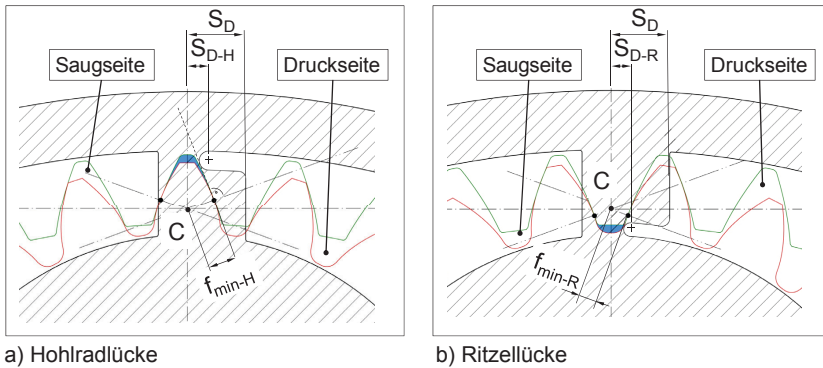
$$S_S = (t_e - f_{\min}) \cdot \cos(\alpha_w) \quad (6.16)$$



**Bild 6.9:** Stegmaße für Verzahnung mit Flankenspiel

Die Stegmaße für eine Verzahnung ohne Flankenspiel können aus dem Grund nicht generell berechnet werden, da zwischen einer Hohlrad- und Ritzellücke unterschieden werden muss. Deswegen wird der Steg mit sogenannten „Entlastungsnuten“ versehen, die eine Ausflussmöglichkeit des Fluids aus der entsprechenden Ritzel- bzw. Hohlradlücke ermöglichen.

Die Stegmaße lassen sich aus den berechneten Volumenverläufen nach Bild 6.8 und deren Minima-Positionen, die über  $f_{\min-H}$  und  $f_{\min-R}$  (Bild 6.10) definiert sind, bestimmen.  $S_D$  ergibt sich aus der Gleichung (6.15).



**Bild 6.10:** Stegabmaße für Verzahnungseingriff ohne Flankenspiel

Aus den berechneten Ergebnissen der Volumenverläufe der verschiedenen Verzahnungslücken kann man nicht nur die optimalen Stegmaße bestimmen, sondern die Verzahnung dahingehend optimieren, den Druckanpassungsvorgang während des Umsteuervorgangs ohne relatives Minimum im Eingriffsvolumen zu erhalten. Dies hat den Vorteil, dass bei radial abgedichtetem Verzahnungsraum das Fluid axial über die Zahnbreite solange entweichen kann, bis der Steg beim Maß  $S_D$  für die Eingriffsstellen nach Bild 6.10 den Verzahnungsraum zusätzlich axial abdichtet.

Durch die Trägheit des Fluids wird bei höheren Drehzahlen die Verdrängung der gesamten Fördermenge in den Hohlrad- und Ritzellücken erschwert. Noch ungünstiger wird diese Situation durch eine Verzahnung, die ein relatives Volumenminimum erst ausbildet, nachdem der Zahneingriff erfolgt ist. Deshalb soll eine Optimierung der Verzahnung das Ziel verfolgen, dieses relative Volumenminimum zu beseitigen. Die Anforderungen wie Fördervolumen oder Baugröße dürfen dabei jedoch nicht verändert bzw. beeinträchtigt werden. Ein weiterer Nachteil von Verzahnungen mit relativem Minimum ist, dass das Stegmaß  $S_{D-H}$  für die Entlastungsnut der Hohlraddücke nicht gefertigt werden kann, wenn nicht ausgeschlossen wird, dass in einem Betriebspunkt ein Verzahnungseingriff mit Flankenspiel vorhanden ist. Bei Flankenspiel verlängert sich der Quetschölraum und die Druck- und Saugseite verbinden sich. Nach der Optimierung über den Eingriffswinkel wird nicht nur die Verzahnung ohne relatives Minimum im Eingriffsvolumen sein, sondern auch die Abstände vom Wälzpunkt sind für die Verzahnung mit Flankenspiel ( $f_{\min}$ ) und ohne Flankenspiel ( $f_{\min-H}$ ) identisch.

Somit kann auf die Entlastungsnut für die Hohlraddücke ( $S_{D-H}$ ) verzichtet werden und das Stegmaß kann nach dem angegebenen Maß  $S_D$  gefertigt werden. Die Entlastungsnut für die Ritzellücke nach Bild 6.10 b) kann dabei jedoch immer gefertigt werden, da diese nie zum hydraulischen Kurzschluss führt.

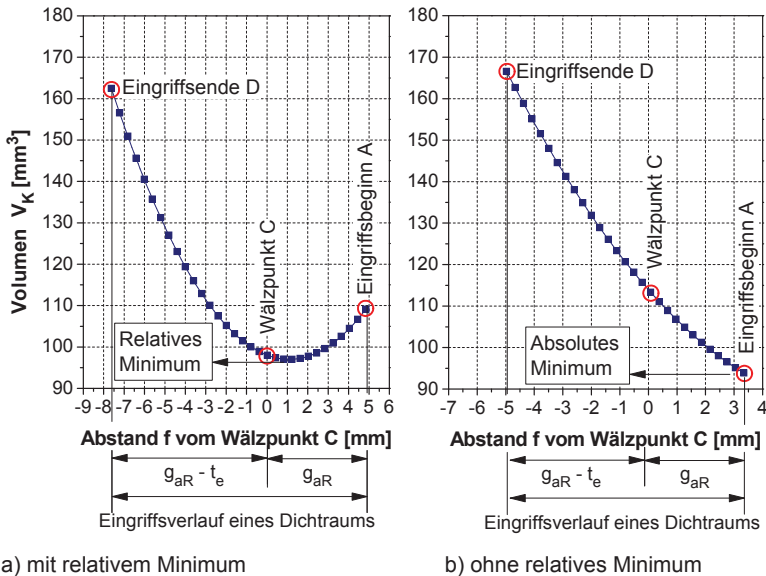
Aus den Funktionen für die verbleibende Restfläche in der Verzahnung (Gleichungen (6.8) und (6.9)) erkennt man, dass vor allem der Betriebseingriffswinkel  $\alpha_w$  einen Einfluss auf die veränderlichen Teilflächen von Hohlrad und Ritzel hat. Der Parameter  $\alpha_w$  zur Variation der bestehenden Verzahnung steht dabei mit dem Eingriffswinkel  $\alpha$  als Grundparameter in folgendem Zusammenhang.

$$\alpha_w = \arccos\left(\cos \alpha \cdot \frac{a_d}{a}\right) \quad (6.17)$$

Wobei sich der Nullachsabstand  $a_d$  aus den Grundeingabedaten berechnet.

$$a_d = \frac{m}{2} \cdot (z_R + z_H) \quad (6.18)$$

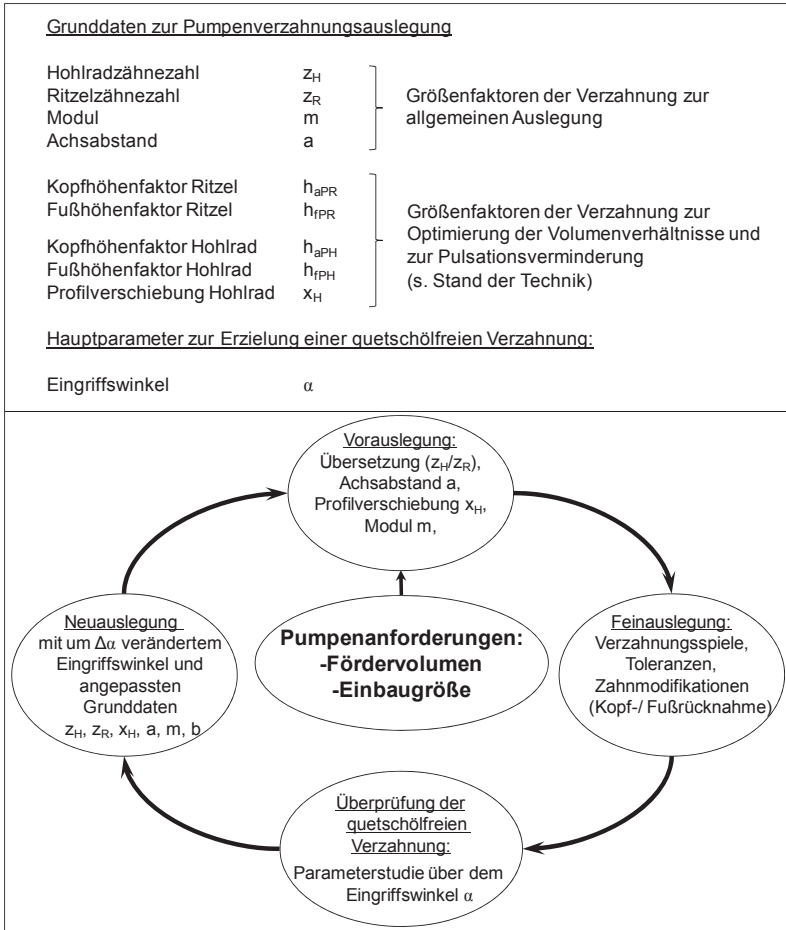
Zwei Verzahnungen, einmal mit und ohne relatives Minimum, zeigt Bild 6.11.



**Bild 6.11:** Vergleich der Volumenverläufe in den Zahnflächen zweier unterschiedlicher Verzahnungspaare

Die Grunddaten zur Auslegung der Pumpenverzahnung ergeben sich aus den Anforderungen, wie Baugröße und Fördervolumen. Aus Ihnen ergibt sich die Grundverzahnung, die dann noch über die Kopf- und Fußhöhenfaktoren und die Profilverschiebung hinsichtlich Fördermenge optimiert werden können (Bild 6.12). Der Eingriffswinkel  $\alpha$  wird dabei grob festgelegt. Anschließend wird über iterative Schleifen

für den Eingriffswinkel die Verzahnung ohne relatives Minimum über den Zahneingriffsstellungen im Eingriff gesucht (Bild 6.11 b)). Die Variationen der Verzahnung müssen sich dabei in den klassischen Grenzen bewegen. Es darf z.B. die Gleitgeschwindigkeit der Zahnflanken nicht zu groß werden oder der Eingriffswinkel  $\alpha$  Werte von  $30^\circ$  nicht überschreiten.



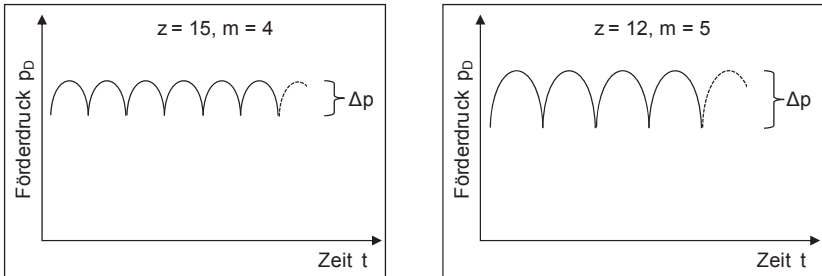
**Bild 6.12:** Iterative Schleife zur Optimierung der Pumpenverzahnung

Um für die Optimierung der Verzahnung mit Hilfe des Eingriffswinkels Anhaltswerte zu bekommen, wird eine Parameterstudie zu den einzelnen Grundparametern erstellt. Die Einflüsse der Parameter werden im Folgenden erläutert.

## 6.5 Parameterstudie für die Pumpenverzahnungsauslegung

Die Grundeingabedaten wie Zähnezahl, Modul, Achsabstand und Profilverschiebung hängen im Wesentlichen von der Baugröße und dem Fördervolumen ab. Es lassen sich jedoch auch in den Grundeingabedaten zur Pumpenverzahnung verschiedene Variationen ausführen. Wird z.B. der Modul  $m$  größer gewählt, werden weniger Zähne auf den Rädern benötigt bei gleichem Teilkreisdurchmesser, siehe Gleichung (6.19). Dies wirkt sich jedoch im nächsten Schritt auf die Förderdruckpulsation direkt aus (Bild 6.13).

$$d_H = m \cdot z_H \quad (6.19)$$



**Bild 6.13:** Förderdruckpulsation bei verschiedenen Zähnezahlen

Eine Parameterstudie soll zeigen, wie Verzahnungen mit vorgegeben Eingabedaten auf Pulsation und quetschölfreier Verzahnung noch im Auslegungsstadium optimiert werden können.

Die Vorgaben zu einer Zahnradpumpe sind vor allem der Volumenstrom bei einer bestimmten Drehzahl und der zu erreichende Bauraum. In einer ersten Abschätzung können die Maße der Pumpe erfasst werden. Dabei wird über die Einbaugröße der Kopfkreisradius  $r_{aH}$  des Hohlrades festgelegt. Die Übersetzung des Pumpenhohlrades zum Pumpenritzel wird im nächsten Schritt im Bereich zwischen 0,9 – 0,7 angenommen. Über die Annahme eines Moduls  $m$  (Vorzugsreihe I nach DIN 780 [49]) lassen sich alle weiteren Größen zur Abschätzung berechnen. Nach Ivantysyn [50] kann der Modul näherungsweise mit Gleichung (6.20) in Abhängigkeit vom mittleren Fördervolumenstrom  $Q$  festgelegt werden.

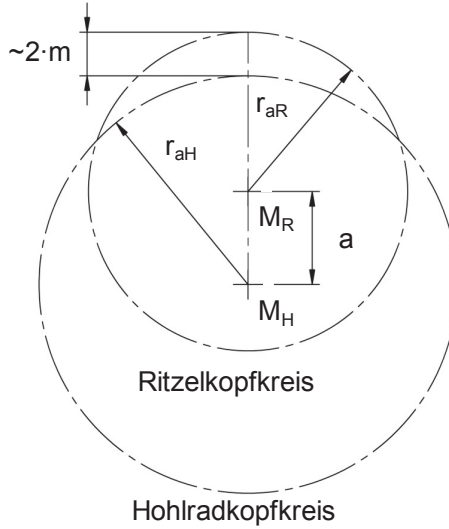
$$m = (0,24 \dots 0,44) \cdot \sqrt{Q} \quad (6.20)$$

Wobei  $m$  in [mm] und  $Q$  in [l/min] angegeben wird.

Aus den getroffenen Annahmen errechnen sich die Teilkreisradien am Ritzel und am Hohlrad nach den Gleichungen (6.21).

$$\begin{aligned} r_H &= r_{aH} - m \\ r_R &= r_{aR} - m \end{aligned} \quad (6.21)$$

Mit den Kopfkreisradien  $r_{aH}$  und  $r_{aR}$  und dem gewählten Modul  $m$  lässt sich ungefähr der Achsabstand  $a$  nach Gleichung (6.22) vorab festlegen (siehe Bild 6.14).



**Bild 6.14:** Hilfsbild zur Berechnung des Achsabstandes

$$a = 2 \cdot m + r_{aH} - r_{aR} \quad (6.22)$$

Die Zähnezahl  $z_H$  des Hohlrads und die Zähnezahl  $z_R$  des Ritzels erhält man nach Gleichung (6.19) in Abhängigkeit vom Modul  $m$  und aus der gewählten Übersetzung. Für die Stirneingriffsteilung  $t_e$  ist es notwendig vorab einen Eingriffswinkel  $\alpha$  zu wählen, der später noch in der Feinauslegung verändert wird.

$$t_e = \pi \cdot m \cdot \cos(\alpha) \quad (6.23)$$

Aus diesen Erkenntnissen wird in einer detaillierten Auslegung über das Fördervolumen nach Gleichung (6.24) die Breite  $b$  festgelegt [14]. Erscheint diese z.B. aus Baumraumgründen als ungeeignet, wird der Modul  $m$  entsprechend korrigiert.

$$\dot{V} = n_H \cdot b \cdot \pi \cdot \left( \frac{z_H}{z_R} \cdot r_{aR}^2 + r_{aH}^2 - \frac{z_H}{z_R + z_H} \cdot a^2 - \frac{z_R + z_H}{z_R} \cdot \frac{t_e^2}{12} \right) \quad (6.24)$$



Das Verhältnis Zahnbreite zum Gleitlagerdurchmesser sollte den Wert 0,25 nach Gleichung (6.25) nicht unterschreiten und bietet eine weitere Bemessungsgrenze.

$$\frac{b}{d_G} \geq 0,25 \quad (6.25)$$

Vier Einflüsse zu Grundangaben der Verzahnungsgeometrie auf das Fördervolumen und die Ausbildung der Zahnformgeometrie werden einzeln untersucht, um eine Sensibilisierung für die Einflüsse zu bekommen. Tabelle 6.1 zeigt die Auswirkungen der Einflüsse. Dabei können die Einflüsse nur qualitativ dargestellt werden, da sie in ihren absoluten Auswirkungen auf das Fördervolumen von den anderen Verzahnungsparametern abhängig sind.

### **Einfluss der Kopfhöhen- und Fußhöhenfaktoren auf das Fördervolumen und die Verzahnungsformgeometrie**

Mit den Kopfhöhen- und Fußhöhenfaktoren können die Kopf- und Fußkreisradien der Verzahnungen direkt erhöht werden und somit das Fördervolumen gesteigert werden, wie die Gleichungen (6.26) und (6.27) zeigen. Eine Variation des Fußhöhenfaktors am Hohlrad  $h_{fPH}$  und dessen Auswirkung auf die Formgeometrie der Verzahnung und das Fördervolumen zeigt Tabelle 6.1, oben.

$$r_{aH/R} = \frac{1}{2} \cdot ((m \cdot z_{H/R}) + (2 \cdot x_{H/R} \cdot m) + (2 \cdot h_{aH/R} \cdot m)) \quad (6.26)$$

$$r_{fH/R} = \frac{1}{2} \cdot ((m \cdot z_{H/R}) + (2 \cdot x_{H/R} \cdot m) - (2 \cdot h_{fH/R} \cdot m)) \quad (6.27)$$

### **Einfluss der Profilverschiebung $x_H$ auf das Fördervolumen und die Verzahnungsformgeometrie**

Die Profilverschiebung des Hohlrades  $x_H$  ist eher negativ zu wählen. Tabelle 6.1, zweite Zeile zeigt auf, wie sich die Verzahnungsgeometrie der Hohlradzähne unter Variation des Profilverschiebungsfaktors ändern und welche Änderungen dabei im Fördervolumen erwartet werden können bei gleichbleibendem Hohlraddurchmesser. Die Profilverschiebung des Ritzels lässt sich mit Hilfe der Profilverschiebung  $x_H$  des Hohlrads, dem erhaltenen Eingriffswinkel  $\alpha$  und den Radpaarzähnezahlen nach Gleichung (6.28) berechnen.

$$x_R = \frac{\text{inv}\alpha_w - \text{inv}\alpha}{2 \cdot \tan(\alpha)} \cdot (z_R + z_H) - x_H \quad (6.28)$$

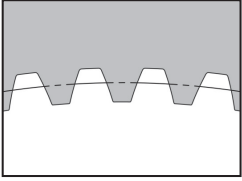
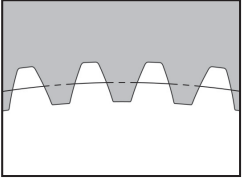
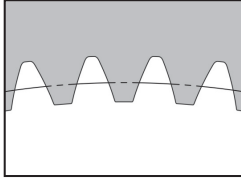
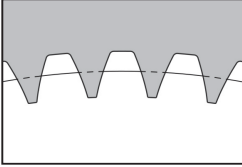
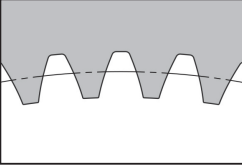
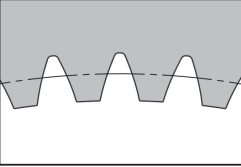
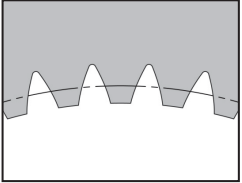
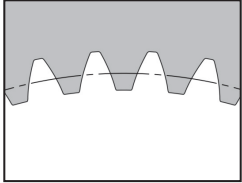
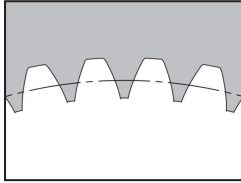
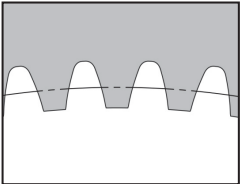
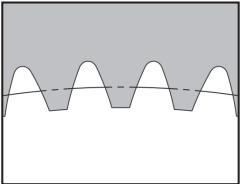
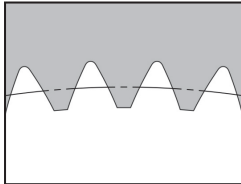
**Einfluss des Achsabstands  $a$  auf das Fördervolumen und die Verzahnungsformgeometrie**

Die Wahl der Übersetzung vom Hohlrad zum Ritzel unterliegt dem Kompromiss zwischen Fördervolumen und Schwingungsanregung. Eine hohe Übersetzung zwischen Ritzel und Hohlrad erhöht das Fördervolumen. Eine Änderung der Übersetzung zieht eine Änderung des Achsabstandes nach sich. Dabei ergeben sich wiederum verschiedene Fördervolumen der Verzahnung (Tabelle 6.1, dritte Zeile).

**Einfluss des Eingriffswinkels auf das Fördervolumen und die Verzahnungsformgeometrie**

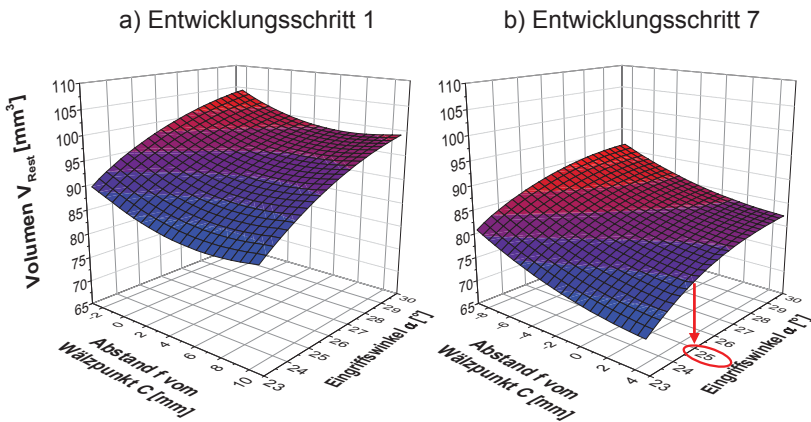
Der Eingriffswinkel als Laufparameter hat ebenso einen Einfluss auf die Formgeometrie der Verzahnung und somit direkt auf das Fördervolumen. Mit höherem Eingriffswinkel werden die Zähne „flacher“ und die Lücke am Zahnkopf breiter. Die Verzahnung verliert jedoch mit steigendem Eingriffswinkel an Förderleistung (Tabelle 6.1, unten).

**Tabelle 6.1:** Einflüsse der Parameter auf das Fördervolumen und die Verzahnungsformgeometrie des Hohlrads

Einfluss des Fußhöhenfaktors $h_{fPH}$			$(\uparrow h_{fPH} \Rightarrow \uparrow \dot{V})$
			
a) $h_{fPH} = 0,7$ ; $\dot{V} = 91\%$	b) $h_{fPH} = 1,0$ ; $\dot{V} = 100\%$	c) $h_{fPH} = 1,3$ ; $\dot{V} = 109\%$	
Einfluss des Hohlradprofilverschiebungsfaktors $x_H$			$(\uparrow x_H \Rightarrow \downarrow \dot{V})$
			
a) $x_H = -0,5 \cdot m$ ; $\dot{V} = 122\%$	b) $x_H = 0 \cdot m$ ; $\dot{V} = 100\%$	c) $x_H = 0,5 \cdot m$ ; $\dot{V} = 77\%$	
Einfluss des Achsabstands $a$			$(\uparrow a \Rightarrow \uparrow \dot{V})$
			
a) $a = 7 \text{ mm}$ ; $\dot{V} = 83\%$	b) $a = 10 \text{ mm}$ ; $\dot{V} = 100\%$	c) $a = 13 \text{ mm}$ ; $\dot{V} = 118\%$	
Einfluss des Eingriffswinkels $\alpha$			$(\uparrow \alpha \Rightarrow \downarrow \dot{V})$
			
a) $\alpha = 15^\circ$ ; $\dot{V} = 103\%$	b) $\alpha = 20^\circ$ ; $\dot{V} = 100\%$	c) $\alpha = 25^\circ$ ; $\dot{V} = 96\%$	

In Tabelle 6.2 werden die Einflüsse der Grundeingabedaten von einer Verzahnung mit einem relativen Volumenminimum im Eingriffsbereich zu einer Verzahnung ohne relatives Minimum beispielhaft dargelegt. In diesem Beispiel sind sieben Entwicklungsschritte dafür notwendig. Dabei werden die Eingabedaten variiert, bis die Verzahnung quetschölfrei und ausführbar ist und den Vorgaben entspricht. Bei der Parameterstudie hin zur quetschölfreien Verzahnung über dem Eingriffswinkel  $\alpha$  wird die Funktion des eingeschlossenen Volumens im Zahneingriff über den Eingriffslängenbereich von  $f$  durchlaufen. Die Funktion wird danach nach  $f$  differenziert und die Gleichung numerisch gelöst. So kann über die erste Ableitung festgestellt werden, ob sich im Eingriffsintervall von  $f$  ein relatives Minimum ausbildet.

Bild 6.15 zeigt den Verlauf des Restvolumens über dem Abstand  $f$  vom Wälzpunkt C und dem Eingriffswinkel  $\alpha$ . In Bild 6.15 a) ist die gewählte Verzahnung des Entwicklungsschritts 1 dargestellt, bei der sich kein Restvolumen ohne relatives Minimum ausführen lässt. Bild 6.15 b) zeigt nach der Priorisierung gemäß Bild 6.16 die optimierte Verzahnung im Entwicklungsschritt 7 nach Tabelle 6.2. Bei  $\alpha = 25^\circ$  ist kein relatives Minimum in der Verzahnung enthalten und die entsprechenden Vorgaben werden eingehalten. Zudem ist das Volumen im Eingriff der Verzahnung vermindert worden.



**Bild 6.15:** Optimierung einer Verzahnung

Tabelle 6.2 stellt alle Entwicklungsstufen des Optimierungsvorgangs in ihren Einzelauswirkungen dar. Eine Verzahnungsvariante ohne relatives Minimum wird dabei als „quetschölfrei“ bezeichnet. Nach dem Verfahren in Bild 6.16 kann eine Verzahnung bereits bei der Auslegung optimiert werden.

Es ist ersichtlich, dass für den Entwicklungsschritt 7 nach dem Durchlaufen der priorisierten Reihenfolge noch einmal der Achsabstand variiert werden muss, um das gewünschte Ergebnis zu erhalten.

**Tabelle 6.2:** Varianten zur Verzahnungsoptimierung

<i>Parameter</i>		<i>Entwicklungsschritt 1</i>	<i>Entwicklungsschritt 2</i>	<i>Entwicklungsschritt 3</i>	<i>Entwicklungsschritt 4</i>	<i>Entwicklungsschritt 5</i>	<i>Entwicklungsschritt 6</i>	<i>Entwicklungsschritt 7</i>
<i>Kopfhöhenfaktor Ritzel <math>h_{aR}</math></i>	[ ]	0,687	<b>0,387</b>	0,387	0,387	0,387	0,387	0,387
<i>Profilverschiebung Hohlrad <math>x_H</math></i>	[ ]	-0,49	-0,49	<b>-0,29</b>	-0,29	-0,29	-0,29	-0,29
<i>Achsabstand <math>a</math></i>	[mm]	15,13	15,13	15,13	<b>13,13</b>	13,13	13,13	<b>10,75</b>
<i>Modul <math>m</math></i>	[mm]	5	5	5	5	<b>6</b>	5	5
<i>Zähnezahlverhältnis <math>z_R/z_H</math></i>	[ ]	13/-19	13/-19	13/-19	13/-19	13/-19	<b>15/-19</b>	15/-19
<i>Anforderung Fördervolumen</i>	[ ]	100%	95%	100%	96%	110%	100%	<b>100%</b>
<i>Quetschölfreie Verzahnung</i>	[ ]	nein	nein	nein	nein	nein	nein	<b>ja</b>

Im Ablaufdiagramm nach Bild 6.16 ist die Priorisierung der Grundeingabedaten so festgelegt, dass die Faktoren mit dem größten Einfluss auf die Optimierung hin zur quetschölfreien Verzahnung zuerst erfolgen. Nach jeder Änderung eines Grundeingabeparameters wird über den Eingriffswinkel  $\alpha$  geprüft, ob die Verzahnung ohne Quetschölraum ausgeführt werden kann. Des Weiteren erfolgt eine Kontrolle über das Fördervolumen und den Einbauraum. Ist nach den iterativen Schleifen eine Verzahnung quetschölfrei mit jedoch zu wenig Fördervolumen, kann in den entsprechenden Grenzen über die Verzahnungsbreite nachkorrigiert werden. In Tabelle 6.2 werden jedoch die sieben Entwicklungsschritte ohne Zahnbreitenanpassung dargestellt. Es ist nicht möglich die Variationsschritte automatisiert zu durchlaufen, da die Veränderung von einem Parameter eine Anpassung von mehreren Verzahnungsparametern nach sich zieht.

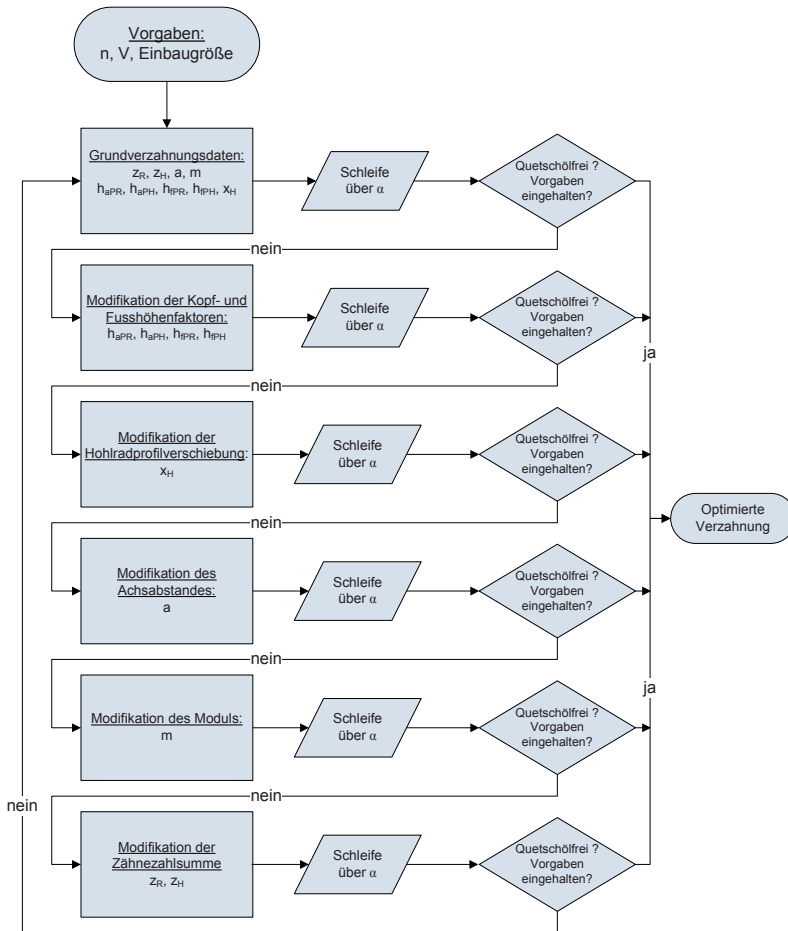
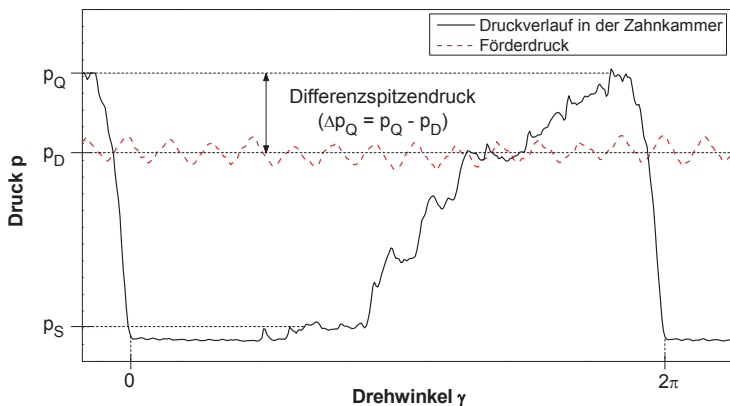


Bild 6.16: Ablaufdiagramm zur Optimierung der Verzahnung

## 6.6 Verifizierung der Verzahnungs- und Stegoptimierung

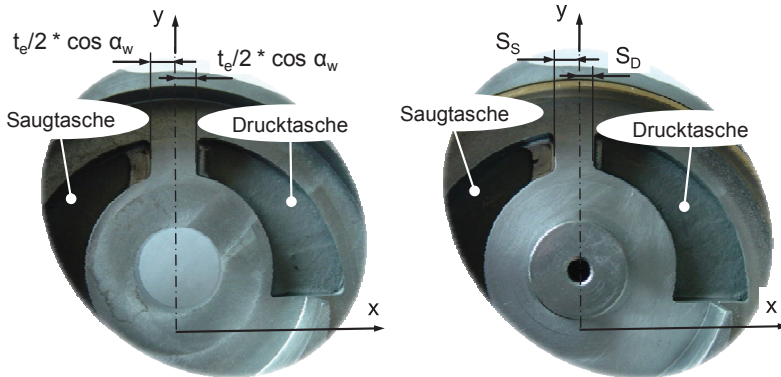
Für das in Kapitel 6.5 beschriebene Verfahren zur Verzahnungsoptimierung und Stegauslegung werden die beiden Verzahnungen V1 ( $z=13$ ;  $a=15,13$  mm) (quetschölbehafet) und V2 ( $z=15$ ;  $a=10,75$  mm) (quetschölfrei) mit verschiedenen Stegformen im Pumpengehäuse über Druck, Drehzahl und Temperatur auf den in der Zahn-lücke auftretenden Spitzendruck hin untersucht und gegenübergestellt. Die Verzahnung V2 wird auf Basis der Optimierungsschleifen in Kapitel 6.5 ausgelegt und gefertigt, während Verzahnung V1 nur nach den Vorgaben des Fördervolumens ausgelegt wird. Es werden drei Stege in den Pumpengehäusen gefertigt. Die Stege S1 (symmetrisch) für die Verzahnungen V1 ( $z=13$ ;  $a=15,13$  mm) und V2 ( $z=15$ ;  $a=10,75$  mm) sind nach dem Stand der Technik ausgelegt. Der Steg S2 (asymmetrisch) wird nach den Maßen im Kapitel 6.4 gefertigt. Im Steg S3 (asymmetrisch-Nut) sind zusätzliche Entlastungsnuten für Verzahnungen ohne Flankenspiel realisiert. Die Druckmessungen werden über den Miniaturdruckaufnehmer nach Kapitel 5.2.1 aufgezeichnet. Dabei werden absolute Werte gemessen. Es ist jedoch von Interesse, um wie viel der Druck in der Zahn-lücke während einer Umdrehung den mittleren Förderdruck übersteigt (Quetschöldruckspitze). Somit wird als Messgröße der Differenzdruck  $\Delta p_Q$  zwischen dem Spitzendruck  $p_Q$  in der Zahn-lücke und dem Förderdruck  $p_D$  herangezogen (Bild 6.17). Wie aus dem Stand der Technik bekannt ist, erhöhen Druckspitzen im Eingriffsbereich den Schallpegel der Pumpe [8, 16]. Eine Schallpegelmessung für alle Einflussparameter wird aufgrund der nicht dafür geeigneten Prüfstands-anordnung wegen Schallabstrahlungen der Anlage nicht durchgeführt. Es wird jedoch für die Verzahnungen V1 und V2, die in diesem Kapitel optimiert wird, eine Schallpegelmessung mit den jeweiligen Pumpen im Einsatz in einer mobilhydraulischen Anlage gegenübergestellt.



**Bild 6.17:** Ermittlung des Differenzspitzendrucks

### 6.6.1 Einflüsse zwischen den Steggeometrien

Die Stegmaße zu Steg S1 (symmetrisch), basierend auf dem Stand der Technik, werden im ersten Gehäuse ausgeführt. Der Steg S2 (asymmetrisch) wird nach Kapitel 6.4 mit den Maßen  $S_D$  und  $S_S$  gefertigt. Die Verzahnung wird dabei so in die Pumpe eingebaut, dass über den Achsabstand sichergestellt wird, dass Flankenspiel vorhanden ist und kein Klemmen auftritt. In Bild 6.18 sind der Steg S1 und der Steg S2 mit den ausgeführten Fertigungsmaßen abgebildet.



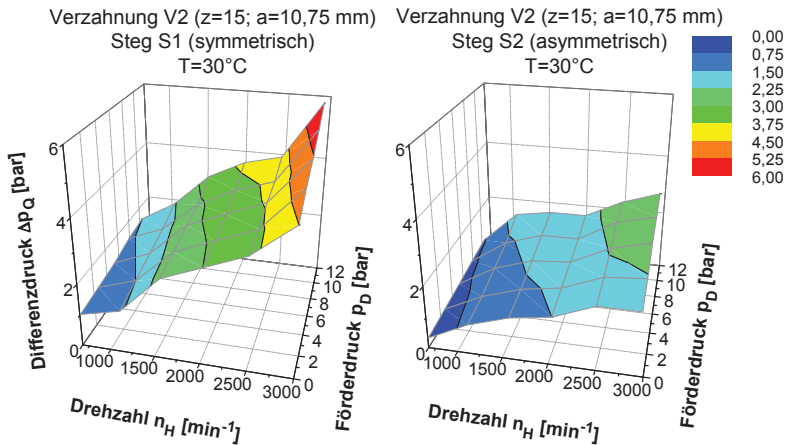
a) Steg S1 (symmetrisch), ausgeführt nach dem Stand der Technik

b) Steg S2 (asymmetrisch), ausgeführt nach Kapitel 6

**Bild 6.18:** Stegmaße für die Stege S1 und S2

Bild 6.19 zeigt die unterschiedlichen auftretenden Differenzspitzendrücke über den Drehzahlen und den Förderdrücken  $p_D$  in der Zahnluke. Deutlich zeigt sich beim Einsatz des Gehäuses mit Steg S1 ein höheres Differenzdruckniveau als beim Einsatz von Steg S2. Über der Drehzahl und dem Förderdruck kann eine maximale Senkung des Differenzspitzendrucks um bis zu 56% erreicht werden gegenüber der Stegeometrie S1.



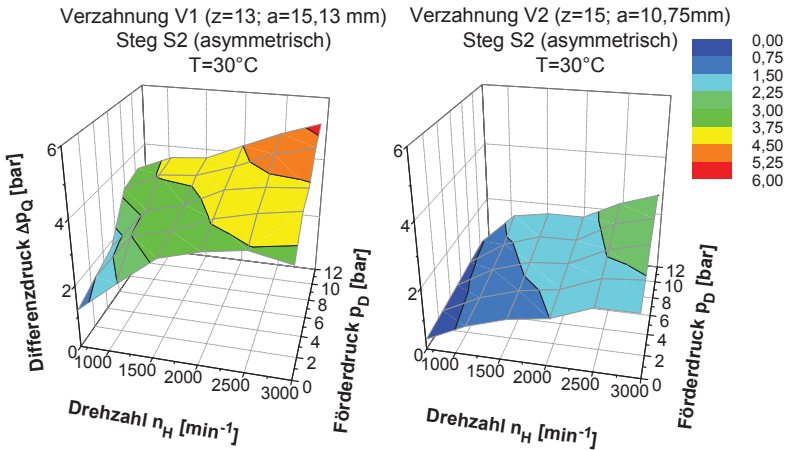


**Bild 6.19:** Einflüsse der Steggeometrie auf den Differenzspitzendruck über Drehzahl und Förderdruck

### 6.6.2 Einflüsse der Verzahnungsarten

Die Verzahnungstypen V1 ( $z=13$ ;  $a=15,13$  mm) und V2 ( $z=15$ ;  $a=10,75$  mm) werden bei gleichen Betriebsparametern gegenübergestellt. Dabei unterscheiden sich diese Verzahnungen unter anderem dadurch, dass Verzahnung V2 im Gegensatz zur Verzahnung V1 kein relatives Minimum im eingeschlossenen abgedichteten Volumen der Verzahnungslücke ausbildet. Beide Verzahnungen haben ähnliche Fördervolumen (siehe Bild 6.11) und können somit verglichen werden. Die Stege werden dabei nach dem oben genannten Verfahren bereits optimiert und ausgelegt.

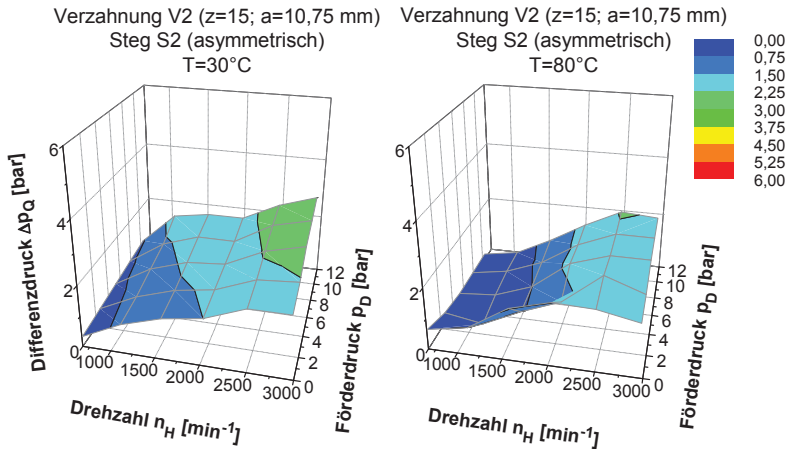
In Bild 6.20 sind die Verzahnungen V1 und V2 bezüglich der Differenzspitzendrücke über der Drehzahl und dem Förderdruck gegenübergestellt. Bei der ohne relatives Minimum ausgeführten Verzahnung V2 kann gegenüber V1 der Spitzendruck um bis zu 51% gesenkt werden. Der Einfluss einer optimierten Verzahnung hinsichtlich des eingeschlossenen Volumens wird dabei sehr deutlich hervorgehoben.



**Bild 6.20:** Einflüsse der Verzahnungsarten auf den Differenzspitzendruck über Drehzahl und Förderdruck

### 6.6.3 Einflüsse der Viskosität

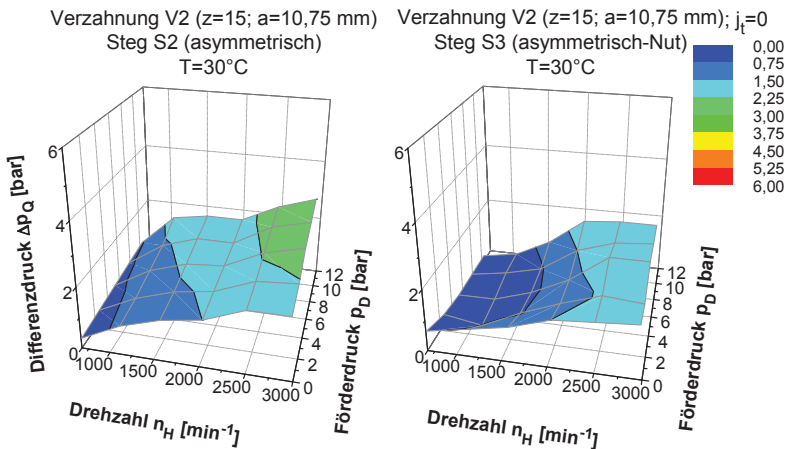
Mit der Öltemperatur kann am Prüfstand die Viskosität des Mediums verändert werden. Dabei wird mit beiden Verzahnungen V1 und V2 der Einfluss der Viskosität auf die in den Zahnücken auftretenden Differenzspitzendrücke untersucht. Bei hoher Temperatur und damit niederviskosem Medium ist die auftretende Trägheit geringer und es kann somit mehr Volumen aus der Verzahnungslücke verdrängt werden. Dieser Effekt führt bei der optimierten Verzahnung V2 und dem optimiertem Steg S2 (asymmetrisch) zu einer Senkung der Differenzspitzendrücke um 18%.



**Bild 6.21:** Einflüsse der Viskosität auf den Differenzspitzendruck über Drehzahl und Förderdruck

#### 6.6.4 Einflüsse der Entlastungsnuten bei Verzahnungen mit Flankenspiel

Für die Verzahnung V2 wird ein Versuchsgehäuse mit dem Achsabstand so angepasst, dass mit der vermessenen Verzahnung exakt das rechnerisch geplante Verzahnungsspiel erreicht wird. Dazu wird der Steg S3 (asymmetrisch-Nut) passend nach Bild 6.10 gefertigt. Bild 6.22 stellt die Differenzspitzendrücke der nach Flankenspiel optimierten Verzahnung V2 mit dem in dem Steg S3 gefertigten Entlastungsnuten der Verzahnung V2 mit Flankenspiel mit dem optimierten Steg S2 (asymmetrisch) gegenüber. Der Spitzendruck wird dabei um weitere 11% gesenkt. Bei Verzahnungen ohne Flankenspiel ist ein erhöhter Aufwand in der Fertigung notwendig, um die Verzahnung spielfrei zu bekommen und sicherzustellen, dass kein Klemmen auftritt. Zudem gibt es die Gefahr, dass bei bestimmten Betriebszuständen die Räder über das Lagerspiel auseinander bewegt werden können. Somit würde sich bei den optimierten Nutungen ein Kurzschluss einstellen. Bei einem Betriebszustand, bei dem die Pumpenräder jedoch sehr stark ineinander gedrückt werden, kann sich zusätzliches Geräusch infolge von Klappern und erhöhter Verschleiß infolge von größerer Flächenpressung einstellen. Daher ist abzuwägen, ob dieser Effekt im Kosten-Nutzen Verhältnis steht. Die konvex-konkav ausgerichteten Zahnflanken der Innenzahnradpumpe bilden zudem auf der Rückflanke eine größere Dichtwirkung als die konvex-konvex ausgerichteten Zahnflanken einer Außenzahnradpumpe. Somit kann keine allgemeine Aussage gemacht werden, ob die Erkenntnisse von Außenzahnradpumpen ohne Flankenspiel auf Innenzahnradpumpen übertragen werden können.



**Bild 6.22:** Einflüsse bei Verzahnungen ohne Flankenspiel auf den Differenzspitzendruck über Drehzahl und Förderdruck

### 6.6.5 Auswertungsüberblick

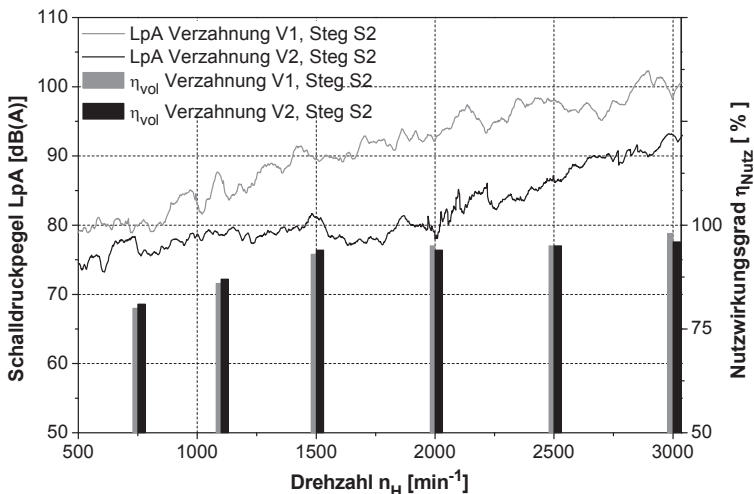
Tabelle 6.3 fasst alle Einflussparameter zusammen. Die Steggeometrie hat in dieser Parameterstudie den größten Einfluss (-56%) gefolgt von der Verzahnungsausführung (-51%) auf die Differenzspitzendrücke in der Zahnflanke. Weit geringer fällt der Einfluss der spiel- und nicht spielbehafteten Verzahnung aus. Mit einer Spitzendruckminderung um 11% ist dies der kleinste Effekt. Der betriebsbedingte Viskositätseinfluss wirkt sich mit einer Drucksenkung um bis zu 18% deutlicher aus. Er kann über die Geometrie und die Konstruktion aktiv wenig beeinflusst werden, da sich die Fördermedien und die angestrebten Betriebstemperaturen nach den Maschinen und Anlagenzwecken richten.

**Tabelle 6.3:** Auswertung der Einflussparameter auf den Differenzspitzendruck

<b>Einflussparameter</b>	<b>Gegenüberstellung des Differenzspitzendrucks <math>\Delta p_Q</math> während einer Umdrehung in der Zahnflanke</b>	
<i>Steggeometrie</i>	<b>Steg S2 (asymmetrisch)</b> - 56%	<b>Steg S1 (symmetrisch)</b>
<i>Verzahnungsart</i>	<b>Verzahnung V2</b> -51%	<b>Verzahnung V1</b>
<i>Flankenspiel mit Steggeometrie</i>	<b>Verzahnung V2, <math>j_t = 0</math></b> -11%	<b>Verzahnung V2</b>
<i>Viskosität</i>	<b><math>\eta</math> für <math>T = 80^\circ\text{C}</math></b> -18%	<b><math>\eta</math> für <math>T = 30^\circ\text{C}</math></b>

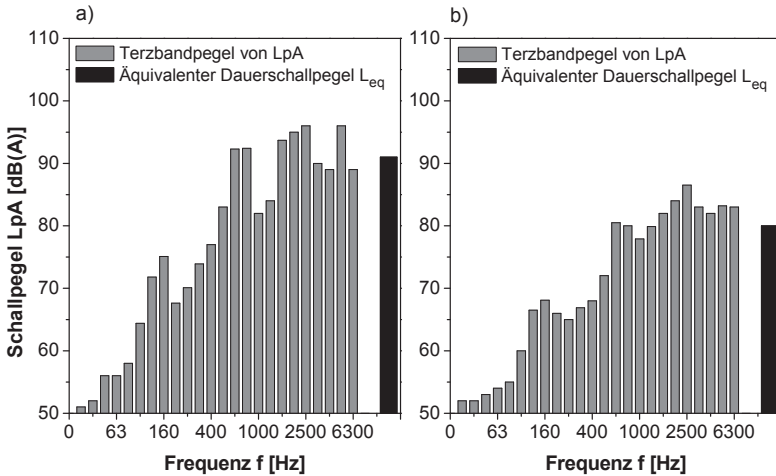
Für die quetschloptimierte Verzahnung V2 mit dem optimierten Steg S2 wird eine kontinuierliche Geräuschmessung über der Drehzahl in der Pumpe im Einsatz in einer mobilhydraulischen Anlage durchgeführt. Für die festgelegten Drehzahlen des Versuchsprogramms (Kapitel 5.4) werden zusätzlich die Nutzwirkungsgrade erfasst. Die Verzahnung V1 mit dem dafür vorgesehenen Steg S2 wird im gleichen Umfeld und unter gleichen Bedingungen auf den Schalldruckpegel und die Nutzwirkungsgrade hin untersucht und der Verzahnung V2 mit dem Steg S2 gegenübergestellt (Bild 6.23).

Eine deutliche Senkung ( $\Delta 8,5 \text{ dB(A)}$ ) des Schalldruckpegels wird in der Pumpe mit der Verzahnung V2 gegenüber der Pumpe mit der Verzahnung V1 festgestellt. Dabei weichen jedoch die ermittelten Nutzwirkungsgrade nur geringfügig voneinander ab, bzw. liegen die Abweichungen im Bereich der Messgenauigkeit. Dieser Effekt zeigt, dass der Differenzspitzendruck einen wesentlichen Einfluss auf die Druckwechselkräfte in der Pumpe und somit deren Schallabstrahlung ausübt. Die Förderleistung der Pumpe, anhand der ermittelten volumetrischen Wirkungsgrade verglichen, wird dabei wenig beeinflusst. Vor allem im Niederdruckbereich ist der Verlust an Förderleistung infolge unterschiedlicher Druckgradienten im Eingriffsbereich geringer. Der Effekt der Minderung der Druckgradienten in den Druckwechselvorgängen und der daraus resultierenden Schallpegelsenkung hat dabei jedoch den größeren Einfluss.



**Bild 6.23:** Vergleich der Schallpegel und Nutzwirkungsgrade

Zusätzlich wird für den statistisch meist durchlaufenen Drehzahlbereich bei  $2000 \text{ min}^{-1}$  eine Terzbandanalyse der gemessenen Schalldruckpegel bis  $6300 \text{ Hz}$  erstellt (Bild 6.24).



**Bild 6.24:** Terzbandpegelanalyse im Vergleich von a) Verzahnung V1, Steg2 und b) Verzahnung V2, Steg 2 mit der Auswertung des äquivalenten Dauerschallpegels  $L_{eq}$

Auffällig ist bei der Auswertung des Schalldruckpegels über der Frequenz, dass die Ordnung 27,33 ( $f_1 = 911$  Hz) und deren ganzzahlige Vielfache deutlich zu erkennen sind (Bild 6.24). Diese ergeben sich aus der Kombination der Zähnezahlen der Antriebskette. Das Antriebsrad des Getriebes ( $z_{GA} = 82$ ) kämmt mit dem Antriebsrad der Hohlradverzahnung ( $z_A = 57$ ), das wiederum die Pumpeninnenverzahnung ( $z_H = -19$ ) enthält. Die Pumpeninnenverzahnung erzeugt die am Pumpenausgang auftretende Förderdruckpulsation. Die Frequenzen  $f_n$  lassen sich nach Gleichung (6.29) aus der Ordnung der Antriebskette in Verbindung mit der Drehzahl  $n_{Antrieb}$  berechnen [52].

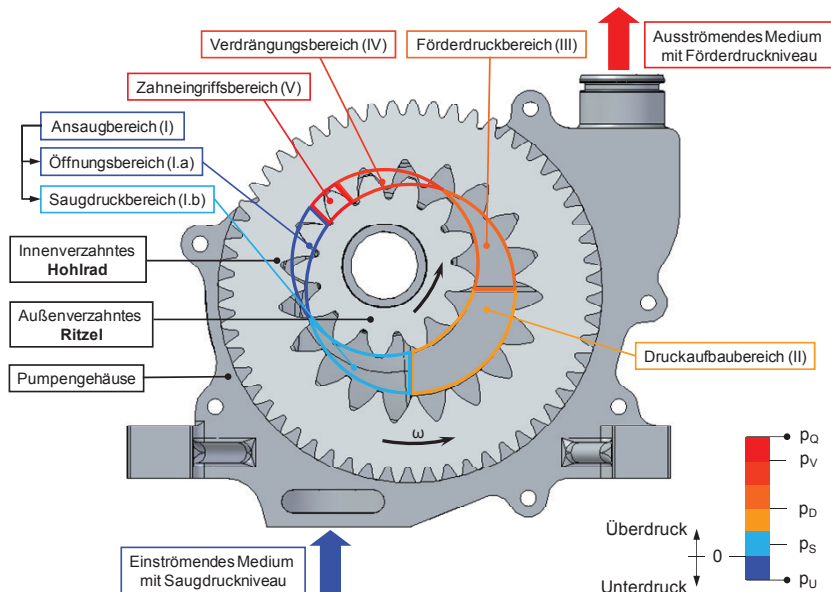
$$f_n = \left( n_{Antrieb} \cdot \frac{|z_{GA}|}{|z_A|} \cdot |z_H| \right) \cdot n, \quad \text{mit } n = 1, 2, 3 \dots \quad (6.29)$$

Beim Vergleich des Schalldruckpegels der beiden Verzahnungen V1 ( $z=13$ ;  $a=15,13$  mm) und V2 ( $z=15$ ;  $a=10,75$  mm) wird deutlich, dass bei Verzahnung V2 die Spitzenwerte des Schalldruckpegels der Ordnung 27,33 und deren ganzzahlige Vielfache gesenkt werden. Durch die Reduzierung der Quetschdrücke in den Zahnlücken wird die Anregung der Förderdruckpulsation verringert und damit die Ausbildung von Luftschall vermindert. Bei Verzahnung V2 wird das Geräusch aufgrund fehlender tonaler hochfrequenter Anteile subjektiv angenehmer empfunden als bei Verzahnung V1.

## 7 Druckverlauf in der Zahnkammer

### 7.1 Berechnungsmodell

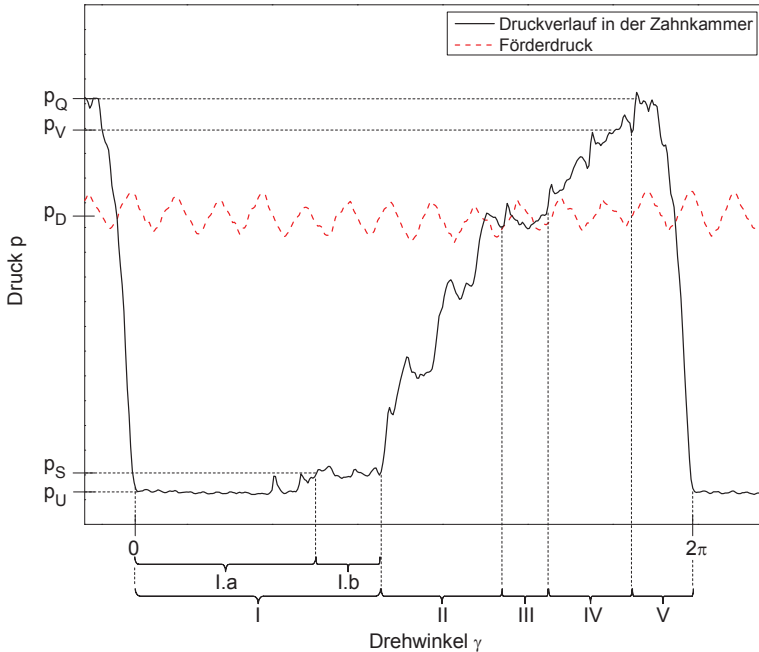
Mit einem zu erstellenden Berechnungsmodell soll der in einer Innenzahnradpumpe herrschende Druck in einer Zahnkammer während einer gesamten Umdrehung analytisch bestimmt werden, um somit bei der Auslegung geometrische Größen der Pumpe festlegen zu können. In Bild 7.1 ist die Geometrie der Pumpe dargestellt. Es entstehen in Umfangsrichtung im entgegengesetzten Uhrzeigersinn die fünf Hauptbereiche (I – V) des Druckverlaufs und die entsprechenden Druckstufen. Eine Zahnkammer durchläuft zuerst den Ansaugbereich (I) mit den Saugdruckniveaus  $p_s$  und  $p_u$ , wird dann über den Druckaufbaubereich (II) in den Förderdruckbereich (III) mit dem Förderdruckniveau  $p_D$  geführt, um schließlich im Zahneingriffsbereich (V) entleert zu werden. Die Druckerhöhung  $p_v$  im Verdrängungsbereich (IV) ist auf das Phänomen zurückzuführen, dass bereits vor dem Zahneingriff und somit vor der vollständigen Abdichtung zwischen Saug- und Druckraum eine Verdrängung stattfindet.



**Bild 7.1:** Druckbereiche in einer Innenzahnradpumpe

In Bild 7.2 ist ein Druckverlauf einer Zahnkammer über eine Umdrehung in einer Zahnradpumpe abgebildet. Ersichtlich sind die in Bild 7.1 dargestellten Bereiche der

Druckstufen, die sich entsprechend zuordnen lassen. Durch die endliche Zahnkammeranzahl in der Pumpe verhält sich der Förderdruck infolge der Förderstropmpulsation nicht konstant, sondern schwankt mit einem sinusähnlichen Verlauf um das angestrebte Förderdruckniveau. Diese als Förderdruckpulsation bezeichnete Schwankung und das dazugehörige Förderdruckniveau ist in Bild 7.2 abgebildet.



**Bild 7.2:** Realer Druckverlauf in der Zahnkammer während einer Umdrehung

Über die Geometrie der Pumpe lässt sich der Druckverlauf in Bild 7.2 ableiten und die entsprechenden fünf Hauptbereiche zuordnen.

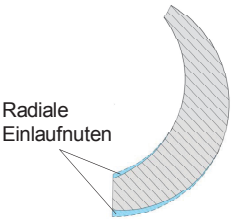
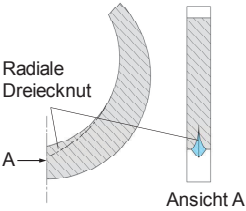
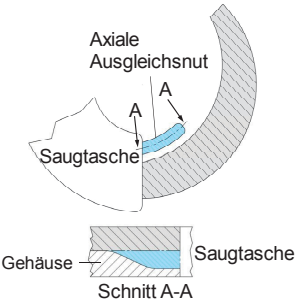
- Ansaugbereich (I) mit Öffnungsbereich (I.a) und Saugdruckbereich (I.b)
- Druckaufbaubereich (II)
- Förderdruckbereich (III)
- Verdrängungsbereich (IV)
- Zahneingriffsbereich (V)

Der Druckverlauf wird bestimmt durch die Fördergeometrie, die das Zahnradpaar, die Saugtasche, die Drucktasche, den Pumpenraum und die Sichel enthält. Ein optimaler Druckverlauf tritt über zusätzlich erzeugte Leckagen und die Trägheit des Mediums



ein. Diese Leakagevariationen erhält man durch eine gezielte Änderung der Fördergeometrie, insbesondere der Sichelgeometrie. Über geometrisch festgelegte Nutungen (Tabelle 7.1) soll der optimale Druckverlauf, der keine Druckspitzen und einen sanften Druckaufbau aufweist, erreicht werden. Diese werden praktisch und auch im Simulationsmodell berücksichtigt.

**Tabelle 7.1:** Nutbezeichnungen und schematische Darstellungen

Nutbezeichnung	Ort	Bild
Radiale Einlaufnut	Sichleinlauf	
Radiale Dreiecksnut	Sichleinlauf	
Axiale Ausgleichsnut	Stirnfläche im Gehäuse, die in die Saugtasche übergeht	

Das Ziel in diesem Kapitel liegt darin, die gemessenen Druckverläufe einschließlich der Druckspitzen so im Berechnungsmodell berücksichtigen zu können, dass die Nutauführungen im Druckaufbaubereich gezielt fertigungstechnisch geplant werden können. Dieser ist der sensibelste Bereich infolge von Geometrieparametern.

### 7.1.1 Druckaufbaubereich

Im Druckaufbaubereich findet der erste Umsteuervorgang zwischen Saug- und Druckraum statt. Zwischen den Zahnköpfen und der im Zahnradpumpegehäuse befindlichen Sichel stellt sich ein Kopfspalt ein, der die Zahnkammern radial abdichtet. Dabei baut sich der in der IZP herrschende Druck in der Förderleitung, Lücke für Lücke über den Sichelbereich, während der Drehbewegung auf. Über dem Druckaufbaubereich entlang der Sichel, wie sie in Bild 7.1 zu sehen ist (hellorange), soll ein möglichst sanfter Druckanstieg vom Saug- zum Druckraum realisiert werden. Das steigende Druckniveau in den Lücken, hat zur Folge, dass das Medium entgegen der Drehrichtung der Zahnräder zurückgedrängt wird. Dieser Druckströmung vom Förderdruck- zum Saugbereich, wirkt eine in der Drehrichtung der Zahnräder wirkende „Schleppströmung“ entgegen und verursacht einen Förderstromverlust (Leckölstrom). Das Medium wird bedingt durch die Scherkräfte, wie in Kapitel 4.4 beschrieben wird, infolge der unterschiedlichen Geschwindigkeiten zwischen Zahnrad und Gehäusewand „mitgeschleppt“.

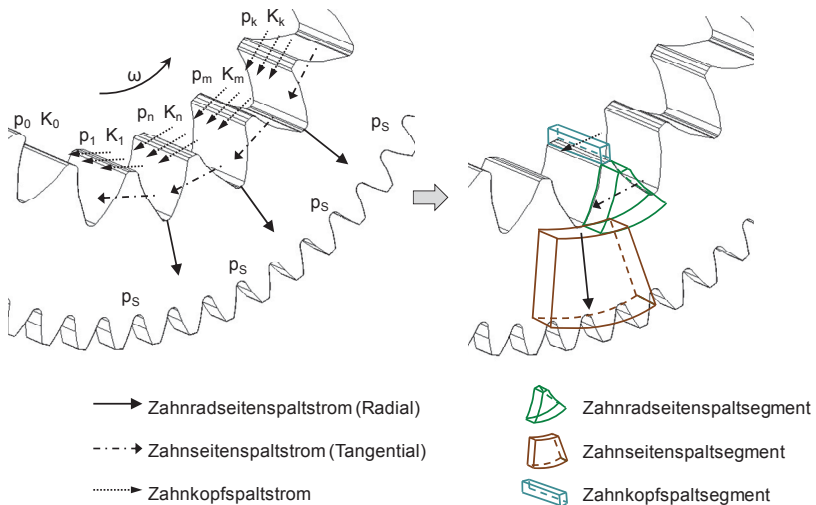
Für das Berechnungsmodell im Druckaufbaubereich werden die Volumenströme für die folgenden Betrachtungen durch Massenströme ersetzt. Das Medium wird in diesem Modell als inkompressibel angenommen, somit ist die Dichte konstant. Der Massenstrom steht mit der Dichte und dem Volumenstrom in folgendem Zusammenhang:

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} \quad (7.1)$$

Im Druckaufbaubereich werden nur die Lücken des Ritzels und des Hohlrads betrachtet, die in Umfangsrichtung gesehen zwischen der Saug- und der Druckseite über den Kopfspalt mit der Sichel abgedichtet werden. Der Index  $k$  beschreibt dabei die im Druckaufbaubereich betrachtete Zahnkammer  $K_k$  (Bild 7.3). Im Druckaufbaubereich können maximal  $k$ -Zahnkammern vorhanden sein. Der in der Zahnkammer  $K_k$  vorhandene Druck  $p$  lässt sich demnach als Druck  $p_k$  der Zahnkammer  $K_k$  schreiben. Der Druck  $p_k$  passt sich dem Maximaldruck, dem Förderdruck  $p_D$  an. Die zur Berechnung des Druckes notwendigen Massenströme setzen sich zusammen aus Kopf- und Seitenspaltströmungen [8, 10].

Um den Druckverlauf in den Zahnkammern im Druckaufbaubereich ermitteln zu können, ist die Einteilung in Segmente für die Strömungsvorgänge in den betrachteten Lücken erforderlich (Bild 7.3 rechts). Der Druck  $p_k$  in einer Zahnkammer  $K_k$  hängt von den hydraulischen Widerständen und der Druckdifferenz, bedingt durch Fliehkraft- und Schleppströmungen ab. Diese Einflüsse werden über die Einflussfaktoren für die jeweiligen Segmente berechnet. Bild 7.3 zeigt alle Leckströme am Hohlrad infolge von Druckunterschieden. Dabei lässt sich deutlich erkennen, dass die auftretenden Druckströmungen der Drehrichtung entgegengerichtet sind. Es sind alle auftretenden

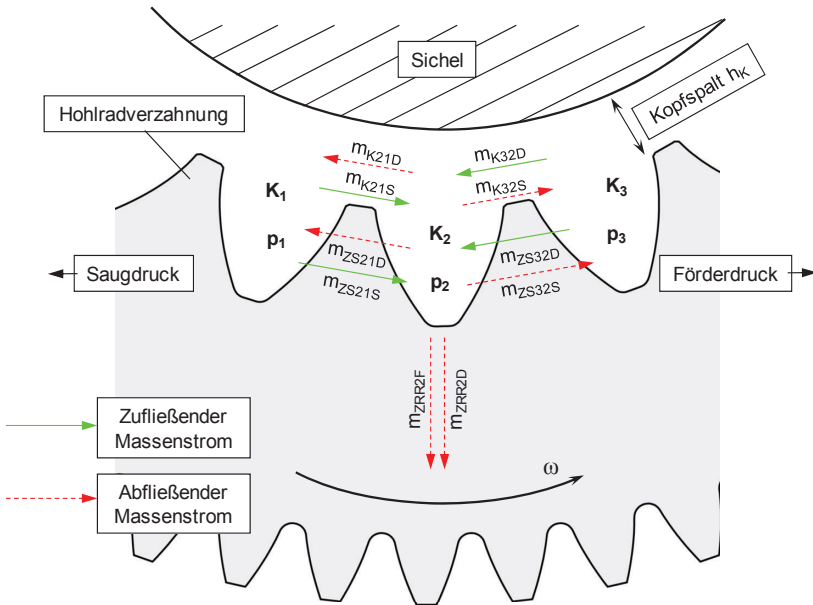
Leckströme als Massenströme zu erfassen und über die hydraulischen Widerstände in den einzelnen Spaltsegmenten zu beschreiben. Durch das Zusammenfügen aller hydraulischen Widerstände kann ein hydraulisches Netzwerk gebildet werden [51]. Dieses wird in Analogie von Hydraulik und Elektrotechnik in einen Schaltplan überführt. Die Maschen- und Knotenregel ermöglicht das Zusammenwirken aller Einzelmassenströme im Netzwerk herauszufinden. Über die Massenströme an den einzelnen hydraulischen Widerständen lassen sich die resultierenden Drücke in den Zahnkammern bestimmen.



**Bild 7.3:** Leckströme am Hohlrad bedingt durch Druckunterschiede

Mit steigendem Index der Zahnkammer steigt der Druck. Zahnkammer  $K_0$  befindet sich auf Saugdruckniveau  $p_s$  und wird nicht von der Sichel mit einem Kopfspalt abgedichtet.

Die Zahnkammer mit dem Index 1 ist die erste Zahnkammer, die über einen Kopfspalt zur Saugseite hin abgedichtet ist. Die mit Index  $k$  bezeichnete Kammer ist die letzte über die Sichel abgedichtete Zahnkammer, die das Förderdruckniveau erreicht. Somit befindet sich die Zahnkammer  $K_{k+1}$  auf Förderdruckniveau  $p_D$ . Alle Kammern dazwischen durchlaufen den Druckaufbaubereich und steigern ihr Druckniveau. Die auftretenden Schleppströmungen resultieren aus dem Geschwindigkeitsunterschied zwischen der stehenden Gehäusewand und dem rotierenden Zahnrad und werden in der Massenstrombilanz, wie in Bild 7.4 dargestellt, beispielhaft für die Zahnkammer mit dem Index 2 miteinbezogen.



**Bild 7.4:** Massenstrombilanz in einer Hohlradlücke

Die in Bild 7.4 verwendeten Indizes für die Massenströme in der Zahnkammer  $K_2$  haben folgende Bedeutung:

Ort an der die Leckströme auftreten:

- K: Zahnkopfspalt
- ZS: Zahnseitenspalt (Tangential)
- ZRR: Zahnradseitenspalt (Radial)

Nummer der Zahnkammer:

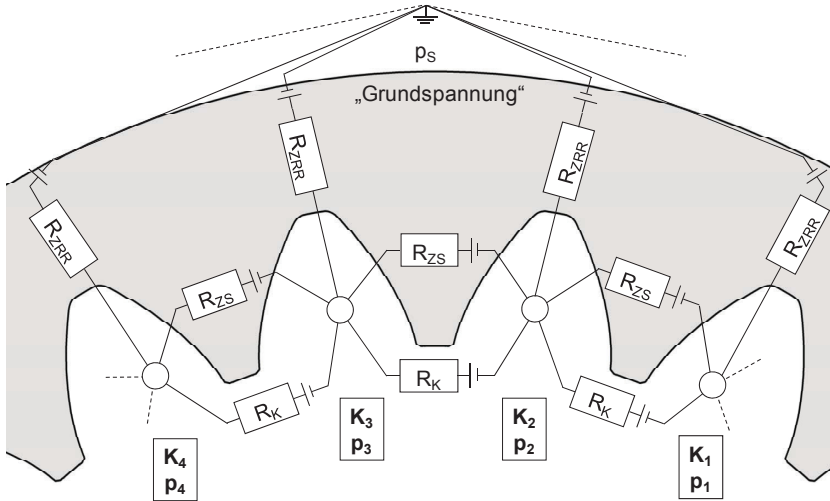
- 21: Massenstrom von Kammer  $K_2$  nach Kammer  $K_1$
- 32: Massenstrom von Kammer  $K_3$  nach Kammer  $K_2$

Leckstromart und -ursache:

- D: Druckströmung
- S: Schleppströmung
- F: Fliehkraftströmung

Alle Leckströme fließen durch die benennungsidentischen hydraulischen Widerstände. An jeder Zahnkammer wie der Zahnkammer  $K_2$  enden fünf hydraulische Widerstände.

Zur Bestimmung der hydraulischen Drücke an jedem Punkt in der Zahnkammer im Druckaufbaubereich ist es notwendig, alle aufgezeigten Strömungssegmente bzw. deren Strömungswiderstände zu einem „Strömungsnetzwerk“ zusammenzufügen (Bild 7.5).



**Bild 7.5:** Hohlradverzahnung mit hydraulischen Widerständen

In jedem aufgezeigten Spaltsegment fließen Massenströme. Diese Spaltsegmente stehen analog zum Zahnrad betrachtet hintereinander (Reihenschaltung) und nebeneinander (Parallelschaltung). Die einzelnen Spaltsegmente können wie einzelne Leitungen betrachtet werden, die wie hydraulische „Leitungswiderstände“ wirken. Demzufolge können sie als hydraulische Widerstände betrachtet werden, die untereinander wie ein Netzwerk gekoppelt sind. Es entsteht ein Netzwerk aus hydraulischen Widerständen, die parallel und in Reihe geschaltet sind analog zu ohmschen Netzwerken in der Elektrotechnik.

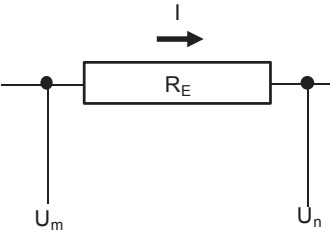
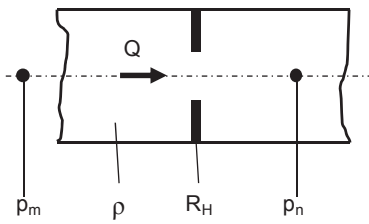
Wie in den Massenstromgleichungen der Strömungssegmente festgehalten wird, erhält man Massenströme aufgrund von Fliehkräften, Schleppströmungen und Druckströmungen. Sie bewirken Fluidströme, die Druckdifferenzen nach sich ziehen. Werden alle Druckdifferenzen vor und nach einem betrachteten Segmente addiert, können die Einzeldruckdifferenzen addiert werden. Damit kann ein Rückschluss auf den Gesamtdruck vor und nach dem jeweiligen Element gezogen werden und später die Druckdifferenzen zwischen Saug- und Druckseite vorausberechnet werden.

Bild 7.5 zeigt die Hohlradverzahnung mit den überzeichneten, analogen Widerständen, die aus Massenstromgleichungen resultieren. Hydraulische Widerstände sind

als elektrische Widerstandssymbole abgebildet. Widerstände, die Druckdifferenzen hervorrufen, die aus Fliehkraft- oder Schleppströmungen kommen, erhalten eine Spannungsquelle als Schaltsymbol.

Diese Analogie zwischen elektrischen und hydraulischen Netzwerken (Tabelle 7.2) aus [53] ermöglicht über die Beschreibung und mit Hilfe der Matrizentheorie des Knotenpotentialverfahrens [54] das Gesamtdruckverhalten von Massenströmen und Drücken zwischen den Elementen und den resultierenden Widerständen bei den parallel und in Reihe geschalteten Elementen zu berechnen. Als Knotenpunkte und Druckpunkte werden die jeweiligen Zahnlücken definiert. Dort werden für die angrenzenden Spaltstromsegmente die Partialdrücke über das beschriebene Verfahren berechnet. Als Endergebnis wird für eine Zahnradpumpe der Verlauf des Drucks in der Zahnkammer für den Druckaufbaubereich über eine Umdrehung ausgegeben. Daraus können Förderdruckverluste und volumetrische Verluste ermittelt werden, die wiederum einen Rückschluss auf den Gesamtwirkungsgrad der Pumpe zulassen.

**Tabelle 7.2:** Hydraulischer Widerstand mit der Analogie zur Elektrotechnik

Elektrischer Widerstand $R_E$	Hydraulischer Widerstand $R_H$
Durch den elektrischen Widerstand $R_E$ wird ein Spannungsabfall im Element erzeugt.	Durch Einbauten (Krümmer, Abzweigungen, kleine Spalte) wird ein Druckabfall verursacht. Aufgrund der Dissipationsenergie entsteht Wärme.
 $\Delta U = U_m - U_n$	 $\Delta p = p_m - p_n$
$\Delta U = R_E \cdot I \quad (7.2)$	$\Delta p = R_H \cdot Q \quad (7.3)$
	$\Delta p = \frac{R_H \cdot \dot{m}}{\rho} \quad (7.4)$
Einheit $R_E = [\Omega]$	Einheit $R_H = \left[ \frac{\text{Ns}}{\text{m}^5} \right]$

In der Hydraulik wird das Verhältnis von Druck, hydraulischem Widerstand, Dichte und Massenstrom durch die allgemeine Massenstromgleichung ausgedrückt:

$$\dot{m} = \rho \cdot \frac{1}{R_H} (p_m - p_n) \quad (7.5)$$

Widerstände treffen sich an ihren Knotenpunkten, die letztendlich den Druckmesspunkt an der jeweiligen Stelle beschreiben. Der Aufbau des hydraulischen Schaltplans gleicht dabei dem eines elektrischen Schaltplans. Die Spaltwiderstände zwischen den Zahnücken, also der Kopfspalt- und der Zahnseitenspaltwiderstand sind parallel geschaltet. Der Zahnradseitenspaltwiderstand liegt zwischen dem Knotenpunkt „Zahnücke“ und dem Knotenpunkt „Saugdruck“.

Im Falle der Zahnradpumpe entspricht dieses Potential dem Saugdruckniveau  $p_s$  und damit in Analogie der „Grundspannung“. Die „Speisespannung“ hingegen entspricht dem Förderdruckniveau im Druckraumbereich  $p_D$ . Verlässt der letzte Knoten, also die letzte Zahnücke vor der Druckseite den Druckaufbaubereich, ist der Spalt für den Kopfspaltwiderstand so groß, dass sich infolge eines unendlich kleinen Widerstands ein „Kurzschluss“ einstellt.

Bedingt durch die vorhandene Analogie zur Elektrik eignet sich für die Berechnung eines solchen Netzwerks das Knotenpotentialverfahren, das in [54] beschrieben wird.

Allgemein geschrieben, lassen sich die Drücke nach Gleichung (7.6) berechnen, wobei  $G$  die Leitwerte, also die Kehrwerte der hydraulischen Widerstände darstellen,  $p$  den jeweiligen Druck am Knotenpunkt  $K$  und  $\dot{m}$  die Massenströme.

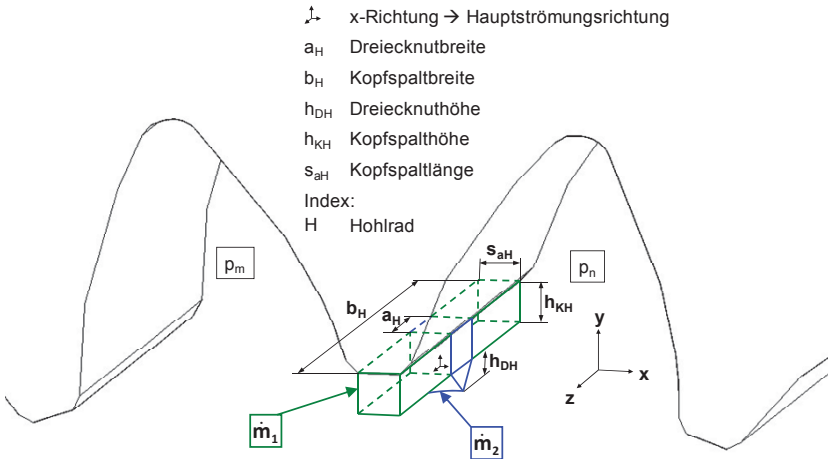
$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1k} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{k1} & G_{k2} & \dots & G_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \vdots \\ \dot{m}_k \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

Das Knotenpotenzialverfahren auf das oben abgebildete Netzwerk (Bild 7.5) angewendet, ergibt eine Matrix, die zu lösen ist. Sie enthält die hydraulischen Widerstände, die Druckverluste und die Druckdifferenzen, nach denen aufgelöst wird.

Im Folgenden werden die einzelnen Geometrien und die Massenstromgleichungen für die Spaltsegmente aus Bild 7.3 dargestellt. Die explizite Lösung der Massenstromgleichungen, die Randbedingungen und die Matrix mit den hydraulischen Widerständen, Leitwerten und Drücken sind dem Anhang A3 zu entnehmen. Dort werden ebenfalls die Herleitungen und Definitionen für die in Tabelle 7.1 dargestellten Nuten aufgeführt.

### Kopfspaltstromsegment an der Hohlradverzahnung

Das Kopfspaltsegment lässt sich wie in Bild 7.6 zu sehen ist, in zwei Massenströme  $\dot{m}_1$  (grünes Segment) und  $\dot{m}_2$  (blaues Segment) unterteilen. Die Trennung dieser eigentlich zusammenhängenden Massenströme ist notwendig, um die Betrachtung einer Dreiecknut in der Sichel zur sanfteren Druckanpassung im Berechnungsmodell zu ermöglichen.



**Bild 7.6:** Lage und Bemaßungen des Kopfspaltsegments

Der Gesamtmassenstrom ergibt sich durch beide Spaltsegmente nach Gleichung (7.7).

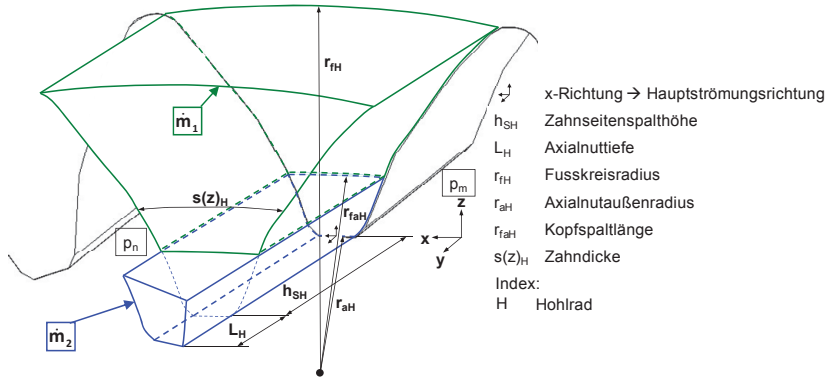
$$\dot{m}_{1,2} = \underbrace{\frac{\rho \cdot (a_H^2 \cdot (h_{KH} + h_{DH})^3 + h_{KH}^3 \cdot (b_H - a_H) \cdot 2 \cdot h_{DH})}{24 \cdot \eta \cdot s_{aH} \cdot h_{DH}}}_{\text{Kehrwert des hydraulischen Widerstands am Hohlradkopfspalt}} \underbrace{\left( \Delta p_{mn} - \frac{6 \cdot \eta \cdot r_{aH} \cdot s_{aH} \cdot \omega_H \cdot (a_H^2 \cdot (h_{KH} + h_{DH}) + h_{KH} \cdot (b_H - a_H) \cdot 2 \cdot h_{DH})}{(a_H^2 \cdot (h_{KH} + h_{DH})^3 + h_{KH}^3 \cdot (b_H - a_H) \cdot 2 \cdot h_{DH})} \right)}_{\text{Druckdifferenz von zwei aufeinanderfolgenden Zahnflächen}} \quad (7.7)$$

Druckminderung durch Schleppströmung



### Zahnseitenspaltsegment an der Hohlradverzahnung

Die Lage und Definitionsgrenzen des Zahnseitenspaltsegments am Hohlrad sind in Bild 7.7 aufgezeigt. Dabei liegt das Zahnseitenspaltsegment zwischen der Stirnfläche des Hohlrades und der inneren Gehäuseseitenwand bzw. der Innenseite des Pumpendeckels.



**Bild 7.7:** Lage und Bemaßungen des Zahnseitenspaltsegments

Der Gesamtmassenstrom ergibt sich für die oben dargestellten Spaltsegmente nach Gleichung (7.8).

$$\dot{m}_{1,2} = \frac{\rho \cdot \left( (h_{SH} + L_H)^3 \cdot \ln \left( \frac{r_{faH}}{r_{aH}} \right) + h_{SH}^3 \cdot \ln \left( \frac{r_{fH}}{r_{faH}} \right) \right)}{24 \cdot \eta \cdot A_H} \cdot \left( \Delta p_{mn} - \frac{6 \cdot \eta \cdot A_H \cdot \alpha_H \cdot \left( (h_{SH} + L_H) \cdot (r_{faH}^2 - r_{aH}^2) + h_{SH} \cdot (r_{fH}^2 - r_{faH}^2) \right)}{\left( (h_{SH} + L_H)^3 \cdot \ln \left( \frac{r_{faH}}{r_{aH}} \right) + h_{SH}^3 \cdot \ln \left( \frac{r_{fH}}{r_{faH}} \right) \right)} \right) \quad (7.8)$$

⏟

Kehrwert  
des hydraulischen Wi-  
derstands

⏟

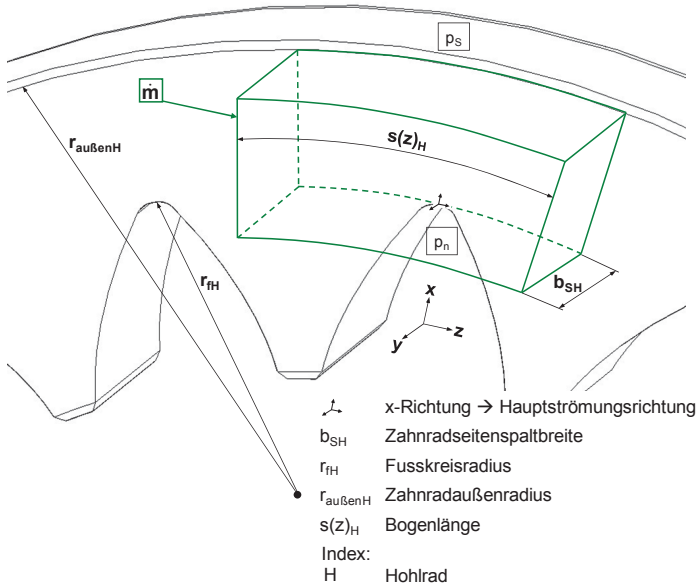
Druckdifferenz von  
zwei aufeinander  
folgenden Zahnlü-  
cken

⏟

Druckminderung  
durch Schlepp-  
strömung

### Zahnradseitenspaltsegment am Hohlradring über der Hohlradverzahnung

Bild 7.8 zeigt die Definitionen für das Zahnradseitenspaltsegment über der Hohlradverzahnung. Dieses befindet sich zwischen der Stirnfläche des Hohlrades und der inneren Gehäuseseitenwand bzw. der Innenseite des Pumpendeckels.



**Bild 7.8:** Lage und Bemaßungen des Zahnradseitenspaltsegments

Die Massenstromgleichung für das Zahnradseitenspaltsegment stellt Gleichung (7.9) dar.

$$\dot{m} = \rho \cdot \frac{\pi \cdot b_{\text{SH}}^3}{6 \cdot \eta \cdot Z_H \cdot \ln \left( \frac{|r_{\text{außenH}}|}{|r_{\text{HH}}|} \right)} \left( \Delta p_{\text{ns}} - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega_H^2 (r_{\text{außenH}}^2 - r_{\text{HH}}^2) \right) \quad (7.9)$$

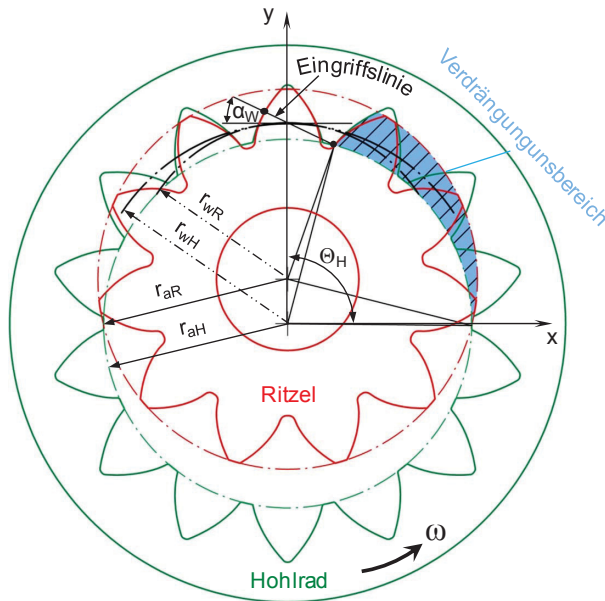
Kehrwert des hydraulischen Widerstands am Zahnradseitensegment

Druckdifferenz zwischen einer Zahn-lücke und dem Saugdruckniveau am Zahnradaußenkörper

Druckreduzierung durch die auftretende Fliehkräftströmung

### 7.1.2 Verdrängungsbereich

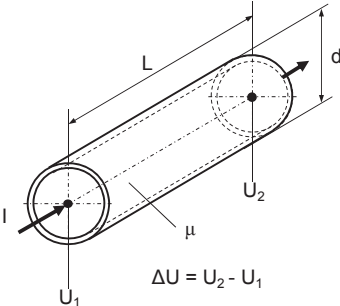
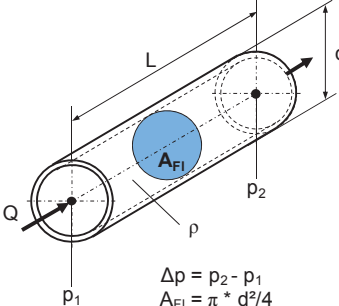
Der Verdrängungsbereich befindet sich auf der Druckseite vor dem Zahneingriffsbereich. Geometrisch lässt sich dieser Bereich durch die Kopfkreisradien des Hohlrads  $r_{aH}$  und des Ritzels  $r_{aR}$  sowie den Winkel  $\Theta_H$  eingrenzen (Bild 7.9). Der Verdrängungsbereich beginnt am Schnittpunkt der zwei Kopfkreise und endet vor dem ersten Eingriffspunkt auf der Zahneingriffslinie. Dabei bewegen sich während der Drehung über den Verdrängungsbereich jeweils ein Zahn des Pumpenritzels in die Zahnücke des Pumpenhohlrads und ein Zahn des Pumpenhohlrads in die Lücke des Pumpenritzels, ohne sich dabei zu berühren. Das sich in den Zahnücken befindliche Medium muss dadurch verdrängt werden. Die Massenträgheit des Mediums und die Volumenstromänderung während der Drehung im Verdrängungsbereich ziehen eine Druckdifferenz im System nach sich. Bereits vor dem eigentlichen Zahneingriffsbereich steigt somit der Druck in den Zahnkammern an. In Bild 7.9 ist der Verdrängungsbereich in einem Zahnradpaar ersichtlich.



**Bild 7.9:** Zahnradpaar mit Verdrängungsbereich

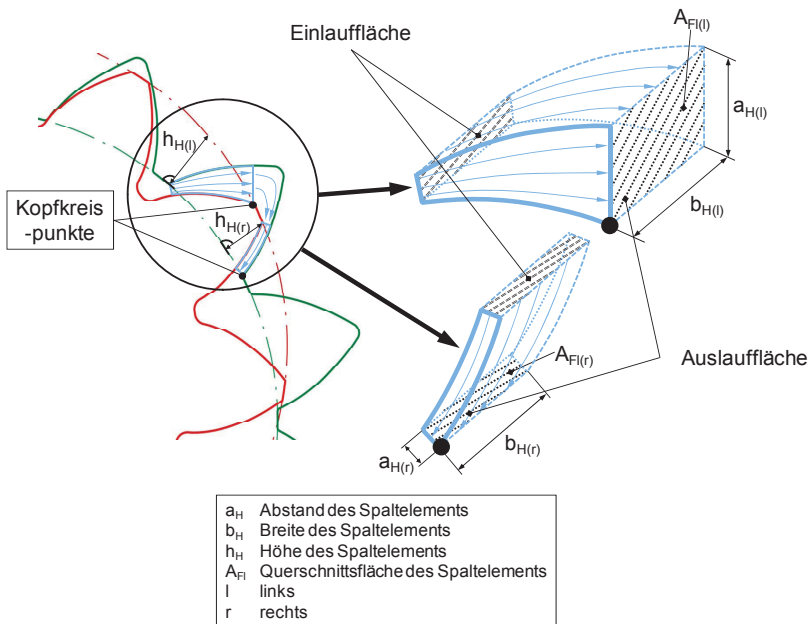
Wie zwischen den hydraulischen Widerständen  $R_H$  und den elektrischen Widerständen  $R_E$ , kann eine Parallele zu einer hydraulischen Induktivität  $L_H$  und der elektrischen Induktivität  $L_E$  gezogen werden [53]. Diese ist notwendig, um Trägheitseffekte für Strömungen für den Eingriffsbereich zu beschreiben.

**Tabelle 7.3:** Hydraulische Induktivität in Analogie zur Elektrotechnik

Elektrische Induktivität $L_E$	Hydraulische Induktivität $L_H$
Die hydraulische Induktivität ist ein Maß für die Trägheit des in einem Leiter fließenden Stroms bei Spannungsänderung.	Die hydraulische Induktivität gibt an, welche Druckdifferenz $\Delta p$ erforderlich ist, um eine Volumenstromänderung $\dot{Q}$ zu erzeugen. Somit wird die Trägheit des Mediums berücksichtigt.
	
$L_E = \frac{\mu}{2\pi} \cdot L \cdot \left( \ln \frac{4 \cdot L}{d} - \frac{3}{4} \right) \quad (7.10)$	$L_H = \frac{\rho \cdot L}{A_{FI}} \quad (7.11)$
$\Delta U = L_E \cdot \frac{dI}{dt} \quad (7.12)$	$\Delta p = L_H \cdot \frac{dQ}{dt} \quad (7.13)$
Einheit $L_E = [\Omega s]$	Einheit $L_H = \left[ \frac{kg}{m^4} \right]$

Die hydraulische Induktivität ist der Widerstand des Mediums, der der Beschleunigung bei einer translatorischen bzw. rotatorischen Bewegung in einem Strömungselement entgegenwirkt. Dabei gibt die Induktivität an, welche Druckdifferenz  $\Delta p$  sich bei einer entsprechenden Volumenstromänderung  $\dot{Q}$  einstellt. Im Folgenden wird die hydraulische Induktivität auf die Strömungsvorgänge im Verdrängungsbereich angewendet und explizit erläutert.

Bild 7.10 zeigt Ersatzsegmente für die geometrischen Gegebenheiten des Verdrängungsbereichs. Die Abmessungen für das Segment werden in Bild 7.10 rechts dargestellt. In jeder Hohlradlücke bilden sich immer zwei Strömungssegmente zwischen dem eintauchenden Ritzelzahn aus. Anders als im Druckaufbaubereich, in dem Ritzel und Hohlrad durch die Sichel voneinander getrennt sind, liegen im Verdrängungsbereich beide Zahnräder ungetrennt gegenüber. An beiden Zahnrädern liegt somit der gleiche Druck an. Ausgehend von der Einlauffläche (Bild 7.10 rechts) der Strömung lassen sich die Spaltgeometrien über  $a_{H(l)}$  und  $b_{H(l)}$  als Funktionen der Radien und Winkelstellungen beschreiben. Die Strömung bildet sich im Verdrängungsbereich von dort aus, wo die Spalthöhe der mit der gegenüberstehenden Zahnflanke am geringsten ist.



**Bild 7.10:** Strömungssegmente im Verdrängungsbereich

Das Maß  $b_{H(l)}$  ist die Zahnradbreite des Hohlrads für das große, linke Segment und  $b_{H(r)}$  für das kleine, rechte Segment. Die Größen  $a_{H(l)}$  und  $a_{H(r)}$  beschreiben den senkrechten Abstand zur Evolvente der gegenüberliegenden Zahnflanke. Die vollständige Beschreibung der Strömungssegmente erfolgt zusätzlich über die Höhen  $h_{H(l)}$  und  $h_{H(r)}$ .

### Berechnung der Strömungssegmentgeometrien im Verdrängungsbereich

Jeder Evolventen-Kopfkreisabstand  $a_{H(l)}$  und  $a_{H(r)}$  lässt sich durch die an der Evolvente anliegende beliebige Tangente  $T_x$  und dem dazugehörenden beliebigen Evolventen-Kopfkreisschnittpunkt  $SP_x$  beschreiben (siehe Bild 7.11). Der kürzeste Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden ist mathematisch definiert als Lot auf der Geraden, das durch diesen Punkt geht. In einer Paarung aus Ritzelzahn und Hohlradlücke lassen sich in jeder Winkelstellung des Verdrängungsbereichs vier Evolventen-Kopfkreisabstände entnehmen (Bild 7.11). Die Normalen zum Kopfpunkt  $SP_1$  bzw.  $SP_3$  von der gegenüberliegenden Evolvente bilden den kürzeren Abstand als die Normalen zum Kopfpunkt  $SP_2$  bzw.  $SP_4$ .

Für die Berechnung der Abstände eines Zahnkopfpunktes zur jeweiligen gegenüberliegenden Evolvente wird zunächst der Vektor zwischen den Punkten  $SP_2$  und  $P_{EvoHI}$  gebildet, wie Gleichung (7.14) beispielhaft für den Abstand  $a_2$  zeigt.

$$\vec{a}_2 = \vec{P}_{EvoHI} - \vec{SP}_2 \quad (7.14)$$

Wobei  $\vec{P}_{EvoHI} = \begin{pmatrix} P_{EvoxHI} \\ P_{EvoyHI} \end{pmatrix}$  und  $\vec{SP}_2 = \begin{pmatrix} SP_{2x} \\ SP_{2y} \end{pmatrix}$  ist.

Die Tangente  $T_2$  an die Evolvente erhält man durch den Ableitungsvektor nach dem Evolventenwinkel  $\xi$  der entsprechenden Evolvente nach Gleichung (7.15).

$$\vec{T}_2 = \frac{d\vec{P}_{EvoxHI}}{d\xi} = \begin{pmatrix} \dot{P}_{EvoxHI} \\ \dot{P}_{EvoyHI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{bH} \cdot \xi \cdot \sin\left(\xi + \gamma + \psi_{bH} - \frac{\pi}{|Z_H|}\right) \\ r_{bH} \cdot \xi \cdot \cos\left(\xi + \gamma + \psi_{bH} - \frac{\pi}{|Z_H|}\right) \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

Die Bedingung für den kürzesten Abstand verlangt von den Vektoren, dass das Skalarprodukt der beiden gleich Null gesetzt wird (Gleichung (7.16)). Die daraus folgende Gleichung enthält für den Drehwinkel  $\gamma$  das jeweilige  $\xi$  der Evolvente als Unbekannte, nach dem aufgelöst wird und das in der entsprechenden Evolventengleichung  $P_{EvoHI}$  rücksubstituiert wird. Somit ist der jeweilige Punkt zur Bestimmung der Segmenthöhen  $a_{H(l)}$  und  $a_{H(r)}$  am Einlauf- und Auslaufbereich für jede definierte Winkelstellung von  $\gamma$  auf der Evolvente bestimmbar.

$$\vec{a}_2 \cdot \vec{T}_2 = 0 \quad (7.16)$$

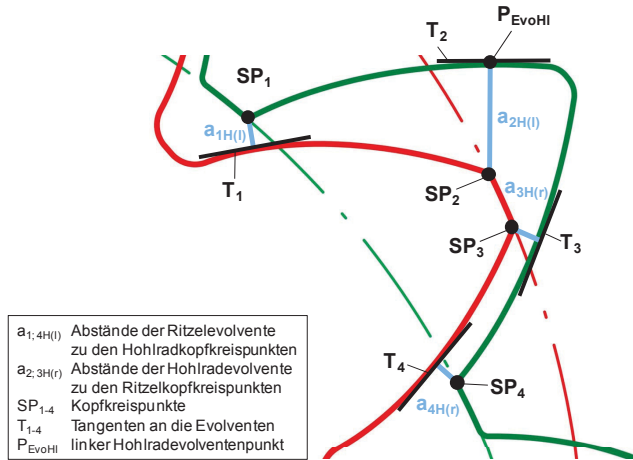


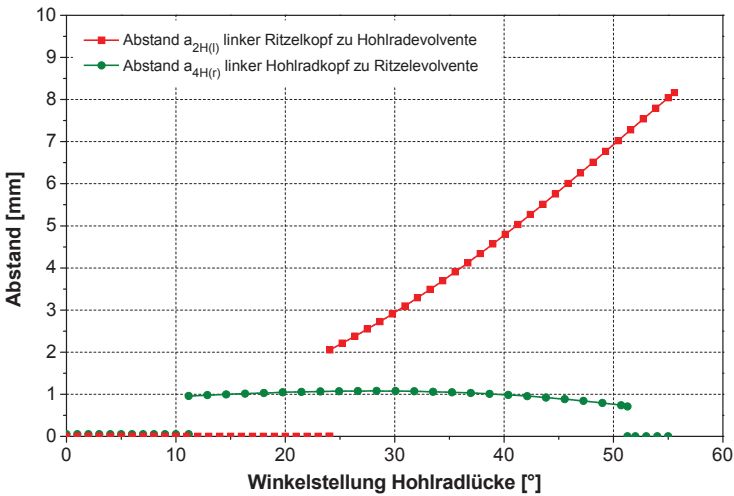
Bild 7.11: Evolventen-Kopfkreisabstände

Gleichung (7.17) zeigt, dass mit immer kleiner werdendem Abstand  $a$  die durchströmte Fläche  $A_{Fi}$  ebenfalls immer kleiner wird. Dieser Zusammenhang und die umgekehrte Proportionalität zwischen der Druckdifferenz  $\Delta p$  und der durchströmten Fläche  $A_{Fi}$  führen dazu, dass die Druckdifferenz theoretisch ins Unendliche ansteigt, wenn  $a_{1H(l)}$  und  $a_{3H(r)}$  gegen Null gehen.

$$\Delta p \sim \frac{1}{A_{Fi}} = \frac{1}{a \cdot b} \quad (7.17)$$

In einer Zahnradpumpe tritt dieser Fall in der Realität jedoch nicht ein. Dadurch wird das Volumenstrommodell im Verdrängungsbereich auf die Abstände  $a_{2H(l)}$  und  $a_{4H(r)}$  reduziert, da die Abstände  $a_{1H(l)}$  und  $a_{3H(r)}$  mit immer kleiner werdendem Drehwinkel  $\gamma$  gegen Null konvergieren.

Ein beispielhafter Verlauf der Abstände  $a_{2H(l)}$  und  $a_{4H(r)}$  über dem Drehwinkel  $\gamma$  der Verzahnung V2, ist in Bild 7.12 zu sehen. undefinierte Bereiche, die außerhalb des Verdrängungsbereichs liegen, werden für den Abstandsverlauf gleich Null gesetzt und sind im Diagramm als Punkte dargestellt. Die erhaltenen Abstände zwischen den Evolventen und Kopfkreispunkten werden benötigt, um die Querschnittsfläche des Strömungssegments für den Verdrängungsbereich beschreiben zu können.



**Bild 7.12:** Kürzeste Abstände der Kopfkreis Schnittpunkte zur Evolvente

### Bildung des Volumenstrommodells im Verdrängungsbereich

Das Modell für die Berechnung des Druckanstiegs in dem Verdrängungsbereich erfordert die Bestimmung des Volumenstroms  $Q$  und seine zeitliche Ableitung, der Volumenstromänderung  $\dot{Q}$ . Für den Verdrängungsbereich wird ein geometrisches Modell verwendet, das exakte Ergebnisse für den Volumenstrom  $Q$  liefert.

Der Ansatz unterscheidet in der Betrachtung zwischen dem Eintauchen eines Hohlradzahns in eine Ritzellücke und dem Eintauchen eines Ritzelzahns in eine Hohlradlücke.

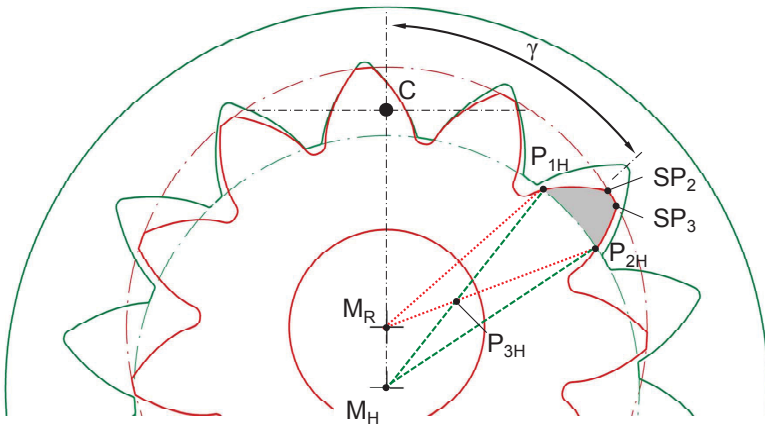
Bei der Verdrängung des in einer Hohlradlücke befindlichen Fluidvolumens (Bild 7.13), das durch den aus der Drehbewegung eintauchenden Ritzelzahn hervorgeht, sind die beiden Schnittpunkte der Ritzevolvente mit dem Hohlradkopfkreis  $P_{1H}$  und  $P_{2H}$  ersichtlich. Zwischen diesen Schnittpunkten und dem Ritzelmittelpunkt  $M_R$  werden zwei Flächen ( $M_R P_{1H} SP_2$  und  $M_R P_{2H} SP_3$ ) unterhalb der Evolventen und eine Fläche unterhalb des Kopfkreissegments ( $M_R SP_2 SP_3$ ) berechnet. Anschließend wird die Fläche unterhalb des Kopfkreissegments zwischen den Schnittpunkten  $P_{1H}$  und  $P_{2H}$  und dem Hohlradmittelpunkt  $M_H$  subtrahiert.



Das Dreieck, das sich zwischen den Punkten  $P_{2H}$ ,  $P_{3H}$  und dem Hohlradmittelpunkt  $M_H$  befindet, muss von dieser Summe ebenfalls subtrahiert werden, während das Dreieck zwischen den Punkten  $P_{1H}$ ,  $P_{3H}$  und dem Ritzelmittelpunkt  $M_R$  addiert werden muss. Die in Bild 7.13 graue Restfläche wird somit über folgende Addition oder Subtraktion der folgenden Flächen erhalten:

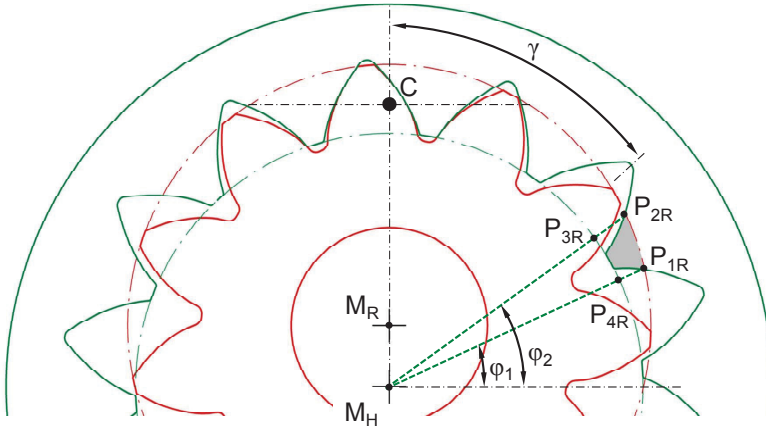
$$\begin{aligned} \text{Restfläche } P_{1H}SP_2SP_3P_{2H} = & M_R P_{1H}SP_2 + M_R SP_2SP_3 + M_R SP_3P_{2H} \\ & - M_R P_{1H}P_{3H} - M_H P_{1H}P_{2H} + M_H P_{3H}P_{2H} \end{aligned} \quad (7.18)$$

Damit ergibt sich die Restfläche an dem Ritzelzahn, der im Hohlradkopfkreis eintaucht und somit multipliziert mit der Verzahnungsbreite den Anteil der Verdrängung des Mediums aus der Hohlradlücke bestimmt.



**Bild 7.13:** Verdrängung in der Hohlradlücke

Für die Verdrängung eines Hohlradzahnes in einer Ritzellücke wird ein anderes Verfahren nach Bild 7.14 angewendet. Die Evoluten des Hohlradzahns, die sich in einer Ritzellücke befinden, werden mit dem Ritzelkopfkreis geschnitten.



**Bild 7.14:** Verdrängung in der Ritzzellücke

Die sich daraus ergebenden Schnittpunkte  $P_{1R}$  und  $P_{2R}$  bilden mit dem Hohlradmittelpunkt  $M_H$  die Vektoren. Daraus ergeben sich die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ . Mit Hilfe der Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  und der Integration über die Kreisfunktionen der Hohlrad- und Ritzelkopfkreisdurchmesser kann die Segmentfläche durch die Schnittpunkte  $P_{1R}$  bis  $P_{4R}$  bestimmt werden. Die Funktion lautet allgemein:

$$A_{\text{Kreisseg}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_o - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_U \quad (7.19)$$

Wobei die untere Funktion  $F_U$  der Kopfkreis-Radius des Hohlrades ist:

$$F_U \Rightarrow r = r_{aH} \quad (7.20)$$

Die obere Funktion  $F_o$ , die den Ritzelkopfkreis begrenzt, lautet bezogen auf den Koordinatenmittelpunkt:

$$F_o \Rightarrow r^2 - 2 \cdot |a| \cdot r \cdot \sin(\varphi) + |a|^2 = r_{aR}^2 \quad (7.21)$$

Im Allgemeinen wird über eine Fläche in Polarkoordinatenform integriert mit

$$A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi \quad (7.22)$$

Dies bedeutet angewendet auf die Fläche der unteren Funktion  $F_U$  die Gleichung für das allgemeine Kreissegment:

$$A_{Fu} = \frac{1}{2} \cdot r_{aH}^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \quad (7.23)$$

Die obere Funktion  $F_o$  muss zuerst nach  $r$  aufgelöst werden. Von den erhaltenen zwei Lösungen der quadratischen Gleichung ist nur die positive Lösung relevant. Diese Funktion wird quadriert, integriert und mit den Grenzen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  in Gleichung (7.22) eingesetzt. Daraus ergibt sich die gesuchte Fläche unter der oberen Funktion  $F_o$ .

$$A_{Fo} = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left( |a| \cdot \sin(\varphi) + \sqrt{a^2 \cdot \sin^2(\varphi) - a^2 + r_{aR}^2} \right) d\varphi \quad (7.24)$$

Beide Funktionen nach Gleichung (7.19) subtrahiert, ergeben das Kreissegment in Bild 7.14 zwischen den vier Schnittpunkten  $P_{1R}$  bis  $P_{4R}$ . Abschließend werden noch die zwei Evolventenabschnitte und deren Kreissegmente subtrahiert, um die Fläche des eintauchenden Hohlradzahns zu erhalten. Diese Fläche multipliziert mit der Verzahnungsbreite ergibt die Verdrängung des Fluidvolumens aus der Ritzellücke.

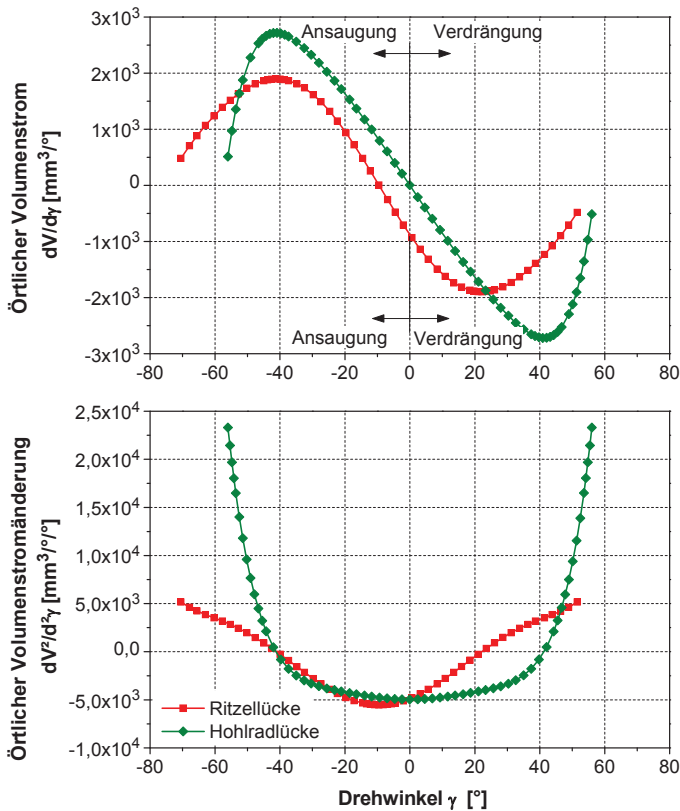
Die Flächenfunktionen der verdrängenden Hohlrad- und Ritzelzähne in den entsprechenden Zahnlücken multipliziert mit der Breite ergeben die Volumenverläufe über den Winkel  $\gamma$ . Über die Beziehungen:

$$Q = \dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\gamma} \cdot \omega \quad (7.25)$$

$$\dot{Q} = \ddot{V} = \frac{dV^2}{d^2t} = \frac{dV^2}{d^2\gamma} \cdot \omega \quad (7.26)$$

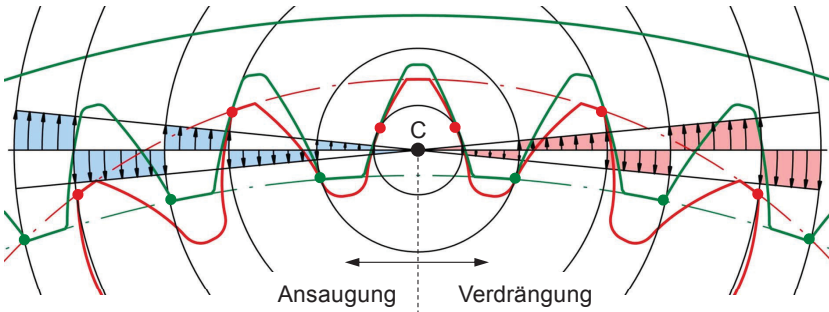
erhält man den Verlauf des Volumenstroms und somit schließlich die zeitliche Ableitung des Volumenstroms.

Beide Verläufe sind in Bild 7.15 als quantitative Graphen über den Winkel  $\gamma$  dargestellt. Ein negativer Volumenstrom bedeutet, dass der Zahn in die Lücke taucht und das Volumen verkleinert. Dieser Vorgang findet im Verdrängungsbereich statt. Im Ansaugbereich nimmt der Volumenstrom positive Werte an, das heißt das Medium fließt in die Zahnücke.



**Bild 7.15:** Örtlicher Volumenstrom und Örtliche Volumenstromänderung über dem Drehwinkel

Bild 7.16 zeigt beispielhaft, wie das Medium zwischen den Grenzen verdrängt wird. Dabei verdrängt der Hohlradzahn das Medium aus der Ritzellücke und umgekehrt. Die Grenzen im Verdrängungsbereich werden durch die Kreise, die durch den Schnittpunkt mit der Kopfkante des jeweiligen Zahns definiert sind, gebildet. Auf der rechten Seite (rot) findet eine Volumenverkleinerung statt, wodurch eine Volumenverdrängung vorliegt. Wenn eine Hohlradlücke und ein Ritzelzahn mittig zueinander stehen, findet nach dem Wälzpunkt C, der Nullpunkt des Winkels  $\gamma$ , eine Volumenvergrößerung statt, die eine Volumenansaugung bewirkt (blau).

**Bild 7.16:** Verdrängungskinematik

Für die Berechnung des Zahnlückendrucks in dem Verdrängungsbereich genügt es nur die Seite der Volumenverkleinerung zu berücksichtigen, da im Bereich der Volumenvergrößerung ein Zahnlückendruck auf Saugdruckniveau  $p_s$  vorhanden ist.

Mit den berechneten Volumenstromänderungen  $\dot{Q}$  als Funktion von  $\gamma$  in dem Verdrängungsbereich lässt sich mit den berechenbaren Größen der Zahnlückendruck  $p_{\text{Lücke}}$  unter Beachtung der hydraulischen Induktivität über folgende Gleichung aus Tabelle 7.3 bestimmen.

$$p_{\text{Lücke}} = \frac{\rho \cdot h_h}{b_R \cdot (a_{2H(l)} + a_{4H(r)})} \cdot \dot{Q}(\gamma) + p_D \quad (7.27)$$

Für  $h_h$  gilt die gemittelte Spaltsegmenthöhe aus linkem und rechtem Spaltsegment.

$$h_h = \frac{h_{H(l)} + h_{H(r)}}{2} \quad (7.28)$$

### 7.1.3 Zahneingriffsbereich

Die restliche Verdrängung des Mediums erfolgt im Zahneingriff. Die Berechnung des Volumens während des Zahneingriffs wird im Kapitel 6 ausführlich erläutert. Die Modelle zur Berechnung des Zahnlückendrucks basieren auf diesen Angaben und werden mit folgenden Annahmen fortgeführt.

Ideal betrachtet ist jedes Medium inkompressibel. Allerdings sind Lufteinschlüsse in einem Medium in der Realität nicht zu vermeiden. Die Lufteinschlüsse führen zu einer Kompression des Mediums, wodurch, im schlimmsten Falle, ein extremer Druckanstieg nach Gleichung (7.29) entstehen kann, da  $V_2$  wesentlich kleiner als  $V_1$  ist. Um das Verhalten beschreiben zu können, sind zwei Strömungsmodelle für die Zahneingriffszone erforderlich. Das Modell setzt sich einerseits zusammen aus einer durch die Verzahnungsgeometrie hervorgerufene Druckerhöhung  $p_{Q1}$  und

andererseits aus der durch die Trägheit des verdrängten Mediums resultierenden Druckerhöhung  $p_{Q2}$ .

Ein „Kolbenmodell“ nach Bild 7.17 soll die Analogie zum Zahneingriff herstellen und daran diesen Sachverhalt erläutern. Zur Erklärung des ersten Druckerhöhungsanteils ersetzt ein Kolben die sich aufeinander zubewegenden Zähne (Bild 7.17). Dieser Kolben wird in einen einseitig geöffneten Zylinder, der mit dem Medium gefüllt ist, hineingedrückt. Das eingeschlossene Volumen zwischen Kolben und Zylinder stellt den Raum dar, den das Medium zwischen den Zahnrädern im abgedichteten Eingriff zwischen den Dichtpunkten  $DP_1$  und  $DP_2$  zur Verfügung hat. Die maximale Position des Kolbens entspricht dem Anfangsvolumen  $V_{Kmax}$ , das durch die beiden Dichtpunkte begrenzt ist. Die niedrigste Stellung des Kolbens im Zylinder entspricht dem Volumenminimum  $V_{Kmin}$  während des Eingriffs. Hat der verfügbare Raum, trotz der vollständig abgedichteten Kammer das Volumenminimum noch nicht erreicht, sondern verkleinert sich weiterhin, wird das darin befindliche Medium „zusammengequetscht“ und ein erhöhter Druck, der so genannte Quetschölldruck  $p_{Q1}$ , stellt sich ein. Demnach sollte der Steg, der die Kammer in axiale Richtung abdichtet so positioniert sein, dass das axiale Abdichten beim Minimum des Kammervolumens eintritt (siehe Kapitel 6). Mit dieser konstruktiven Maßnahme kann das Quetschen des Mediums weitestgehend vermieden werden. Der axiale Ausfluss, den der optimierte Steg gewährleistet, ist klein gegenüber dem Volumen, das aus der Verzahnungslücke verdrängt wird. Somit ist die Annahme einer adiabatischen Zustandsänderung (mit  $\kappa=1$ ) zulässig, um die Einflüsse der Verzahnungsgeometrie zu betrachten [44].

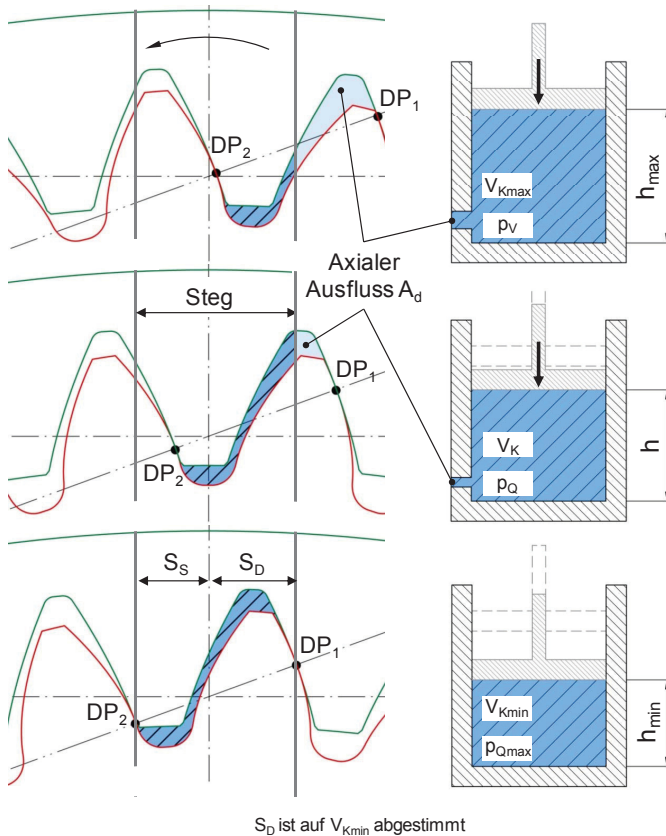
Bei der adiabaten Kompression bezeichnen allgemein  $p_1$  und  $p_2$  Anfangs- bzw. Enddruck und  $V_1$  und  $V_2$  Anfangs- bzw. Endvolumen und  $\kappa$  den Adiabatenexponenten.

$$\frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^\kappa \quad (7.29)$$

Folglich lässt sich die allgemeine Adiabatengleichung (7.29) mit den explizit verwendeten Bezeichnungen aus dem Ersatzmodell zu einer Gleichung umschreiben, mit der der gesuchte Quetschölldruck  $p_{Q1}$  über den Drehwinkel  $\gamma$  bestimmt werden kann.

$$p_{Q1}(\gamma) = p_v \left( \frac{V_{Kmax}}{V_K(\gamma)} \right)^{\kappa_{Medium}} \quad (7.30)$$

$p_{Q1}(\gamma)$ :	Quetschölldruck durch Verzahnungsgeometrie [bar]
$p_v$ :	Maximaler Druck in dem Verdrängungsbereich [bar]
$V_{Kmax}$ :	Maximales Volumen des abgeschlossenen Zahneingriffs [mm <sup>3</sup> ]
$V_K(\gamma)$ :	Kammervolumen während des Eingriffsverlaufs [mm <sup>3</sup> ]
$\kappa_{Medium}$ :	Adiabatenexponent des Mediums (Bei Flüssigkeiten $\kappa=1$ )

Verzahnung im ZahneingriffErsatzmodell im Zahneingriff**Bild 7.17:** Verdrängungsbereich und Ersatzmodell mit optimierter Stegkontur

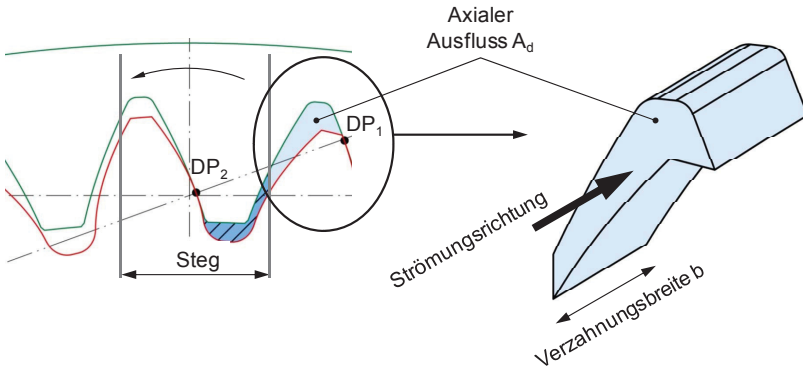
In einer Zahnradpumpe entstehen trotz optimierter Steg- und Verzahnungsgeometrie bei hohen Drehzahlen hohe Drücke in der Zahneingriffszone. Dieses Phänomen ist auf die Trägheit des Mediums zurückzuführen. Jede Flüssigkeit verhält sich träge und erfährt entgegen seiner Bewegungsrichtung eine Trägheitskraft. Abhängig von der axialen Ausflussgeschwindigkeit des Mediums aus der Verzahnungslücke kann das Medium bevor das Kammervolumen komplett durch den Steg und die Dichtpunkte geschlossen ist, bei niedrigen Drehzahlen durch den axialen Ausfluss  $A_d$  gut ausfließen oder bei hohen Drehzahlen nur gehemmt ausfließen (Bild 7.17).

Diese Modellbetrachtung kann mit der Annahme zur Analogie in der Elektrotechnik belegt werden (siehe Tabelle 7.3).

Die hydraulische Induktivität beschreibt den Strömungsvorgang in der Verzahnungslücke und das Ausfließen aus der axial geöffneten Ausflussfläche  $A_d$ . Allgemein lautet die Gleichung für die Berechnung der Druckerhöhung durch induktive Widerstände nach den Gleichungen (7.11) und (7.13) wie folgt:

$$\Delta p = \frac{\rho \cdot L}{A_{Fi}} \cdot \dot{Q} \quad (7.31)$$

Die Fläche des durchströmten Elements  $A_{Fi}$  entspricht der axialen Ausflussfläche  $A_d$  entlang den Verzahnungskonturen, dem Dichtpunkt  $DP_1$  sowie den Stegkonturen (Bild 7.18). Die „Leitungslänge“  $L$  kann durch die Verzahnungsbreite  $b$  ersetzt werden. Die Volumenstromänderung in der Lücke lässt sich aus den im Kapitel 6 aufgestellten Verläufen der Volumina in der Verzahnungslücke über den Winkel ableiten.



**Bild 7.18:** Strömungssegment für den axialen Ausfluss im Eingriffsbereich

Somit lässt sich Gleichung (7.31) mit den Daten der Verzahnungslücke und aufgelöst nach der Funktion des gesuchten Quetschöldrucks wie folgt ausdrücken:

$$p_{Q2}(\gamma) = \frac{\rho \cdot b}{A_d(\gamma)} \cdot \dot{Q}_{Lu}(\gamma) + p_v \quad (7.32)$$

Der Druck  $p_v$  stellt dabei den Verdrängungsdruckanteil dar. Den gesamten Verlauf des Quetschöldrucks  $p_Q$  nach Gleichung (7.33) in der Verzahnungslücke erhält man durch die Addition des Partialdrucks  $p_{Q1}$  und des Partialdrucks  $p_{Q2}$ .

$$p_Q(\gamma) = p_{Q1}(\gamma) + p_{Q2}(\gamma) \quad (7.33)$$

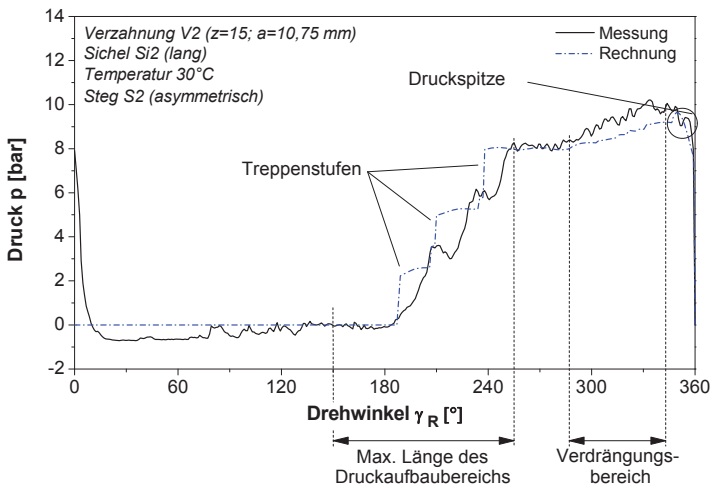


## 7.2 Verifizierung des Berechnungsmodells

Zur Verifizierung der berechneten Ergebnisse werden für die Versuchspumpen je Verzahnungstyp drei Sichel (Si1 – Si3) gefertigt, die über eine entsprechende Verstiftung und Verschraubung genau ins Gehäuse eingebracht werden können. Mit den in den Pumpen verbauten Drucksensoren können die Druckaufbaubereiche genauer untersucht und ausgewertet werden (siehe Kapitel 5.3).

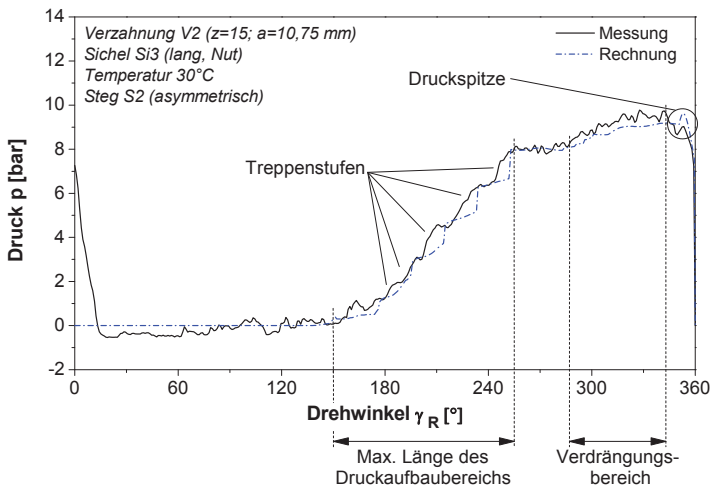
### 7.2.1 Verifizierung der berechneten und gemessenen Druckverläufe in der Zahnkammer

Werden die einzelnen Module des Berechnungsmodells für den Druckverlauf in der Zahnkammer aus Kapitel 7.1 zusammengesetzt, ergibt sich der Druckverlauf in der Zahnkammer für eine komplette Umdrehung in der Zahnradpumpe. Diese berechneten Ergebnisse sollen mit den Versuchsergebnissen über die Druckmessung des Zahnflücheninnendrucks verifiziert werden. Bild 7.19 zeigt einen berechneten Druckverlauf im Vergleich zu einem gemessenen Druckverlauf in der Zahnkammer für die Verzahnung V2 ( $z=15$ ;  $a=10,75$  mm) mit der Sichel Si2 (lang). Der verkürzte Druckaufbaubereich im Vergleich zum maximalen Druckaufbaubereich, sowie der Druckanstieg im Verdrängungsbereich und die Druckspitze im Eingriffsbereich werden erfasst. Deutlich ist zu erkennen, dass das Berechnungsmodell den Verlauf der Messung gut nachbilden kann. Aufgrund der Annahme von idealen Spaltverläufen, werden jedoch größere Druckanstiege (Druckgradienten) bei den Treppenstufen im Druckaufbaubereich berechnet.



**Bild 7.19:** Vergleich von Messung und Rechnung Verzahnung V2, Sichel Si2

Das berechnete Modell gibt einen verkürzten Druckaufbaubereich aus und die Messung bestätigt diese Annahme. Aus diesem Grund sind die Eingabedaten dahingehend verändert worden, dass im Berechnungsmodell die Sichelgeometrie insbesondere im Einlaufbereich verändert werden kann. Die Sichel wird dabei mit einer Einlaufnut versehen, um den Druckaufbaubereich über den komplett verfügbaren Sichelbereich zu strecken. Diese berechnete Sichel wird als Sichel Si3 (lang-Nut) ausgeführt und gefertigt und in die Pumpe eingebaut. Bild 7.20 zeigt den Vergleich zwischen den Versuchsergebnissen und den Berechnungsergebnissen für die Verzahnung V2 mit der Sichel Si3. Es ist ersichtlich, dass der berechnete Beginn und die Länge des Druckaufbaubereichs mit dem der Messung übereinstimmen. Des Weiteren erfasst das Rechenmodell die durch die Einlaufnuten verursachten vergrößerten Leckströme und bildet die Treppenstufen der Druckanstiege entsprechend flacher und mit fließendem Übergang ab.



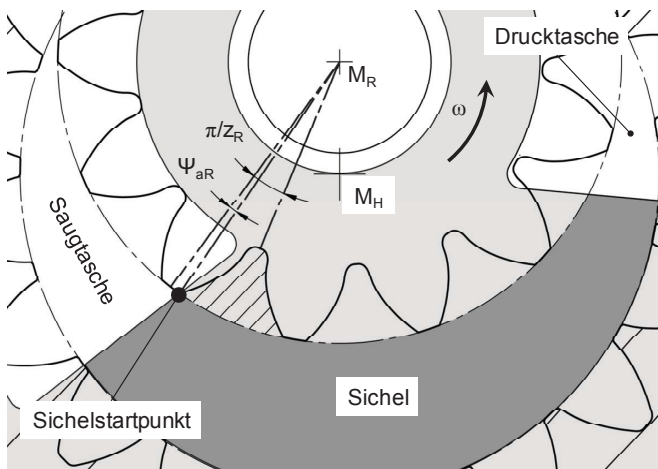
**Bild 7.20:** Vergleich von Messung und Rechnung Verzahnung V2, Sichel Si3

Über die komplette Bandbreite der gemessenen Druckverläufe liegen die Abweichungen zwischen theoretischen und versuchstechnischen Wertepaaren unter 17 %. Ein durchschnittlicher statistischer Fehler von 7 % ergibt sich bei der Auswertung aller Wertepaare. Das Berechnungsmodell stellt sich als hinreichend genau ein, da die Übereinstimmung der Längen des Druckaufbaubereichs sowie die Anzahl der Treppenstufen mit der Messung erfolgt. Diese Kennwerte sind entscheidend für die Auslegung der Geometrieparameter. Im Gegensatz dazu sind die Druckanstiege (Druckgradienten) der Treppenstufen weniger signifikant für die Auslegung.

Deswegen haben die erkennbaren Unterschiede der einzelnen Druckanstiege zwischen Rechnung und Messung weniger Bedeutung.

### 7.2.2 Einfluss der Sichellänge und -form auf den Druckaufbaubereich

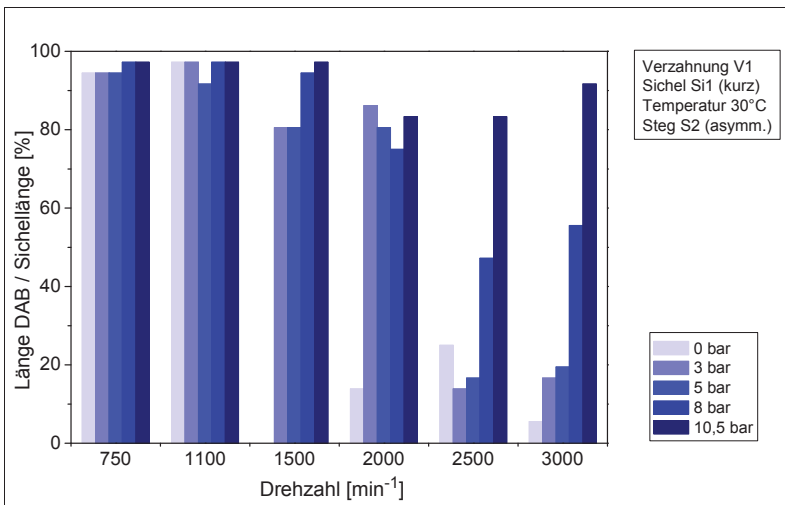
Um hohe Druckunterschiede und somit kurze Druckstöße während des Betriebs der Pumpe zu vermeiden, wird ein möglichst langer Druckaufbaubereich angestrebt, um nur kleine Druckanstiege zu erhalten. Ein längerer Druckaufbaubereich führt zwar zu einer Erhöhung der Gesamtpaltanzahl und somit zu Zusatzverlusten, jedoch überwiegt der Vorteil, dass Druckstöße über einen längeren und damit sanfteren Druckanpassungsbereich vermieden werden können. Wie in Kapitel 7.1 erklärt wird, erstreckt sich der Druckaufbaubereich in den Zahnlücken entlang der Sichel. Dafür wird die Sichel Si1 (kurz) mit einer Bogenlänge von  $\frac{1}{2} \cdot \pi$  ( $90^\circ$ ) bezogen auf den Hohlradumfang gefertigt und die Sichel Si2 (lang) und Si3 (lang, Nut) mit einer Bogenlänge von  $\frac{3}{4} \cdot \pi$  ( $135^\circ$ ). Da die Messungen für den Druckverlauf in der Zahnkammer am Ritzel erfolgen, muss die entsprechende Länge für den Ritzelmittelpunkt  $M_R$  und auf den Ritzelumfang umgerechnet werden. Des Weiteren muss beachtet werden, dass nicht die komplette Sichelänge als Druckaufbaubereich genutzt werden kann. Eine Zahnkammer kann als dicht betrachtet werden, wenn sie über den Zahnkopf in Drehrichtung am Sichelstartpunkt abgedichtet wird. Diese Stellung wird über den Winkel ( $\varphi_{zR} - \varphi_{aR}$ ) in Bild 7.21 beschrieben. Ebenso gelten am Auslaufbereich der Sichel die gleichen Definitionen für eine noch abgedichtete Zahnlucke.



**Bild 7.21:** Abdichtung einer Zahnlücke durch die Sichel

Der Druckaufbaubereich soll möglichst lang sein. Ein Optimum wäre erreicht, wenn der Druckaufbaubereich gleich lang wie die Sichel ist. Dazu wird in den gemessenen Druckverläufen die Länge DAB des Druckaufbaubereichs über eine Umdrehung bei verschiedenen Drehzahl- und Druckniveaus in Winkelgraden ausgewertet und anschließend im Verhältnis zur Sichel­länge dargestellt.

In Bild 7.22 wird die Auswertung des Druckaufbaubereichs für die Sichel Si1 mit der Verzahnung V1 aufgezeigt. Im unteren Drehzahlbereich kann die optimale Druckaufbaulänge (Länge DAB / Sichel­länge) nahezu erreicht werden, während im oberen Drehzahlbereich der Druckaufbaubereich kürzer ausfällt. Dies liegt daran, dass der Widerstand in den Spalten durch die bedingt höhere Schleppströmungswirkung größer als die der entgegengesetzt wirkenden Druckströmung wird (Bild 7.23 b)). Erst bei höheren Förderdrücken kann sich der Druck über die Spalte über einen größeren Winkel aufbauen. Die Seitenspalt- und Kopfspaltwiderstände (siehe Kapitel 7.1.1) können sich dementsprechend gegenüber der Schleppströmung ausgleichen (Bild 7.23 a)), so dass sich das Druckgefälle zwischen den Zahn­lücken im hydraulischen Netzwerk als konstanter „Treppenstufenverlauf“ aufbaut.



**Bild 7.22:** Druckaufbaubereich Sichel Si1 (kurz) Verzahnung V1 ( $z=13$ ;  $a=15,13$  mm)

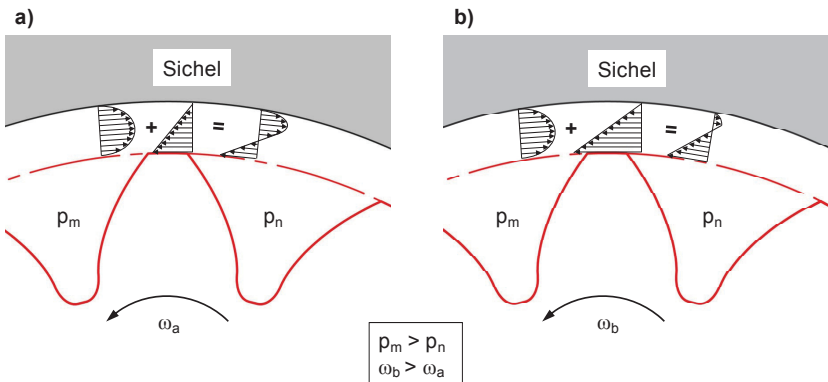
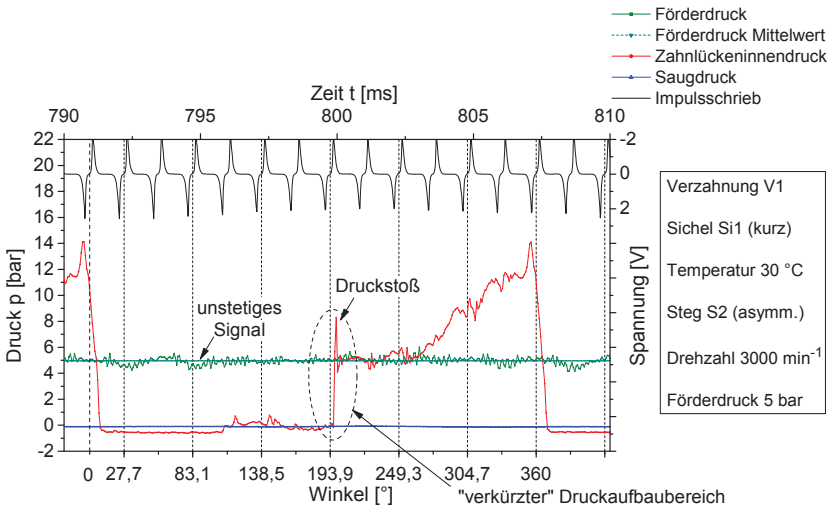
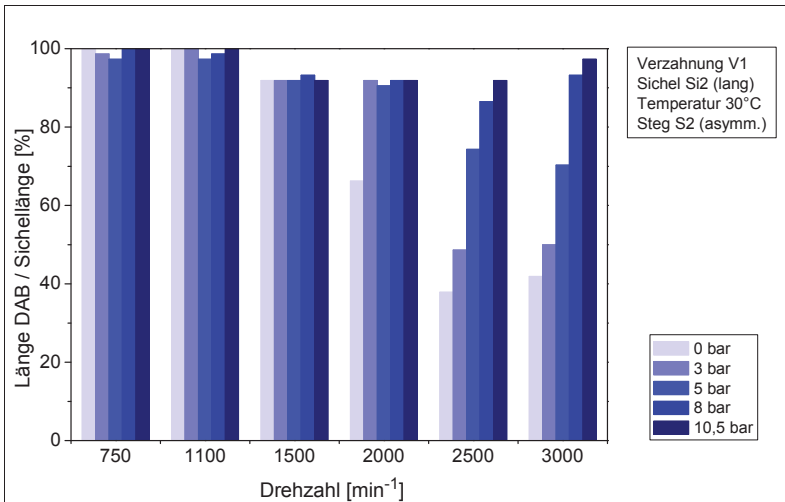


Bild 7.23: Strömungsüberlagerungen im Kopfspaltbereich

Bild 7.24 zeigt den Druckverlauf für eine Umdrehung bei einer Drehzahl von  $3000 \text{ min}^{-1}$  und einem Förderdruck von 5 bar für die Sichel Si1 (kurz) mit der Verzahnung V1. Der extrem kurze Druckaufbaubereich verursacht einen ungewollten Druckstoß in der Pumpe. Des Weiteren wird der Förderdruck so beeinflusst, dass ein unstetiges Signal aufgrund der ungleichförmigen Druckverläufe und der daraus folgenden Leckölpulsation entsteht.

Bild 7.24: Druckverlauf über eine Ritzelumdrehung bei  $3000 \text{ min}^{-1}$  und 5 bar

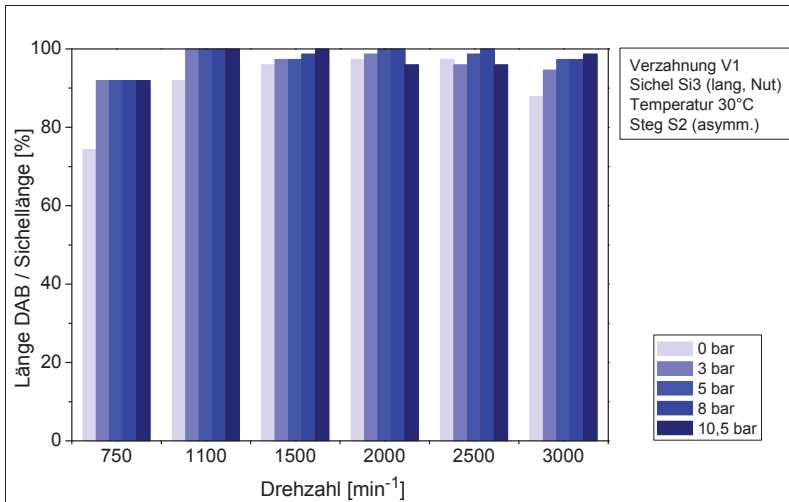
Die Sichel Si2 (lang) mit der Verzahnung V1 hat eine längere Strecke zum Druckaufbau zur Verfügung. Wie bei der Sichel Si1 lässt sich in Bild 7.25 erkennen, dass im unteren Drehzahlniveau nahezu der komplette Druckaufbaubereich ausgenutzt wird. Im Gegensatz zur Sichel Si1 (kurz) stellt sich jedoch der Unterschied heraus, dass sich ab  $2000 \text{ min}^{-1}$  ein längerer Druckaufbaubereich umsetzen lässt. Dies liegt daran, dass sich im längeren Druckaufbaubereich mehr Zahnücken und sich somit mehr Knoten des hydraulischen Netzwerks unter der Sichel befinden. Darum teilt sich das Potenzial auf mehrere Widerstände auf und somit überwiegt die der Druckströmung entgegengesetzte Schleppströmung nicht mehr so stark wie beim kürzeren Druckaufbaubereich. Der dargestellte Druckstoß (siehe Bild 7.24) vermindert sich.



**Bild 7.25:** Druckaufbaubereich Sichel Si2 (lang) Verzahnung V1 ( $z=13$ ;  $a=15,13 \text{ mm}$ )

Eine optimale Druckanpassung kann nur über eingebrachte Nuten in der Sichel erreicht werden. Über das im Kapitel 7.1 dargestellte Berechnungsmodell werden für die Verzahnung V1 entsprechende Nuten vorausberechnet, so dass der Druckaufbaubereich in allen Drehzahl- und Druckbereichen komplett ausgenutzt wird und somit kurze Druckanpassungen und hohe Druckgradienten vermieden werden. Dabei kann im Berechnungsmodell zwischen den in Kapitel 7.1 aufgezeigten Einlaufnuten, Dreiecknuten oder Axialnuten unterschieden werden. Einlaufnuten und Dreiecknuten verbessern vornehmlich den Druckaufbau. Axiale Nuten bewirken im Grunde dasselbe, erfüllen jedoch auch noch die Funktion, dass bei schlechter Füllung der Zahnücken der Bereich der Ansaugung verlängert wird. Aus den Berechnungsergebnissen wird eine entsprechende Sichel Si3 (lang, Nut) mit den Einlaufnuten gefertigt.

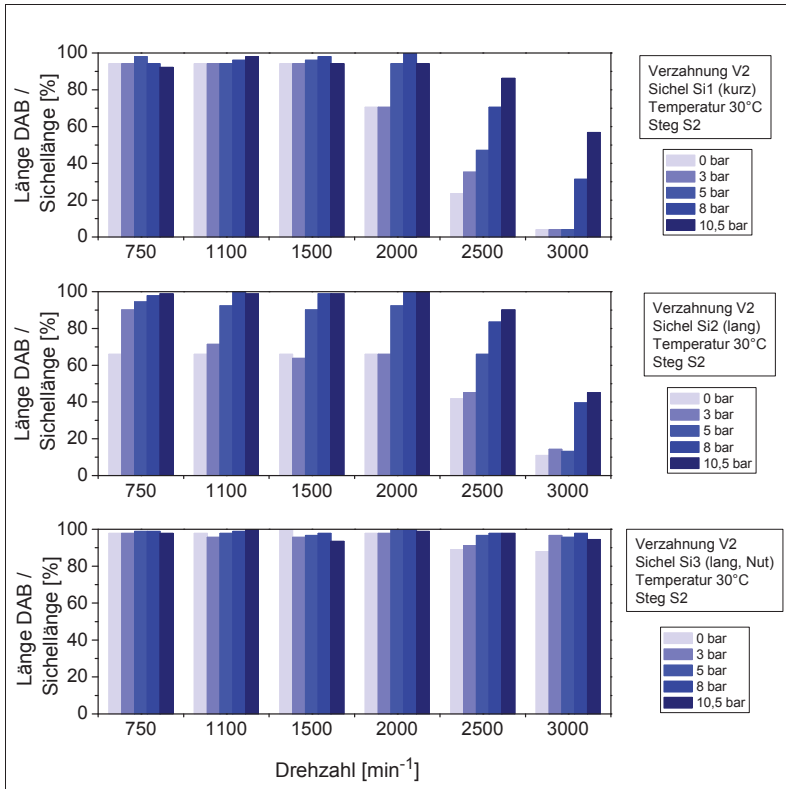
Mit der Sichel Si3 (lang, Nut) zeigen die Versuche in Bild 7.26, dass die eingebrachten Nuten wie im Berechnungsmodell eine über den kompletten Drehzahl- und Druckbereich gestreckten Druckaufbaubereich ermöglichen. Der Kopfspaltwiderstand wird in der Einlaufzone der Sichel so ausgelegt, dass der Druckaufbau über den gesamten Sichelbereich gesehen durch das höhere Potenzial am Anfang des Druckaufbaubereichs nicht vom Einfluss der durch die Schleppströmung verursachten Widerstände beeinflusst wird.



**Bild 7.26:** Druckaufbaubereich Sichel Si3 (lang, Nut) Verzahnung V1  
( $z=13$ ;  $a=15,13$  mm)

Für die Verzahnung V2 werden ebenfalls drei tauschbare Sichelstücke gefertigt. Es zeigen sich die gleichen Effekte wie für die Verzahnung V1. Bedingt durch den größeren Kopfkreis und somit längeren Bereich der Überdeckung am Kopfspalt zwischen Ritzel und Sichel werden die Effekte des verkürzten Druckaufbaubereichs noch verstärkt. Bei hohen Drehzahlen werden auch bei höherem Druckniveau die optimalen Längen der Sichel nicht mehr erreicht (Bild 7.27). Wie in Bild 7.27 zu sehen ist, kann die im Gegensatz zur Sichel Si1 verlängerte Sichel Si2 (lang) die Annäherung zur maximalen Sichelänge verbessern, jedoch sind allgemein gesehen die erreichbaren Längen des Druckaufbaubereichs schlechter zu erreichen gegenüber denen der Verzahnung V1. Ebenso wird für die Verzahnung V2 ein Druckaufbaubereich mit entsprechenden Einlaufnuten so berechnet, dass sich im kompletten Drehzahl- und Druckbereich ein optimaler Druckanstieg entlang der kompletten Sichel ausbildet. Die Sichel Si3 (lang, Nut) wird mit der Einlaufnut gefertigt und anhand der Versuche ausgewertet. Bild 7.27 zeigt die zusammengefassten Ergebnisse für jede

Sichel mit der Verzahnung V2. Wie in der Berechnung kann der Druckaufbaubereich für die Sichel Si3 nahezu im gesamten Bereich voll ausgenutzt werden und somit können ungewollte Druckanpassungen und daraus folgende Druckpulsationen vermieden werden.



**Bild 7.27:** Druckaufbaubereich Sichel Si1 (kurz), Si2 (lang) und Si3 (lang, Nut) für Verzahnung V2 ( $z=15$ ;  $a=10,75$  mm)

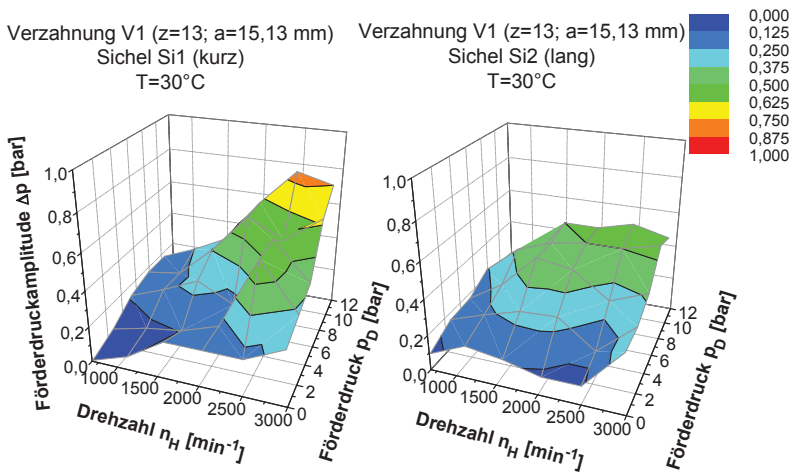


### 7.2.3 Einfluss der Sichelgeometrie auf die Förderdruckpulsation

Der Verlauf des Drucks im Druckaufbaubereich hat einen wesentlichen Einfluss auf die Förderdruckpulsation [3]. Die Förderdruckpulsation wird im Allgemeinen durch die unkonstante Förderung bedingt durch die Verzahnungsgeometrie beeinflusst [8, 10, 21]. Dabei hat die Größe der Amplituden einen direkten Einfluss auf die Geräuschentwicklung [16]. Die geometrisch bedingte Förderdruckpulsation kann jedoch aufgrund von Leckölpulsationen und vor allem Kompressionspulsationen weiter erhöht werden. Die Kompressionspulsation wird vor allem durch den „stufigen“ Druckaufbau im Druckaufbaubereich maßgeblich hervorgerufen. Erhält man einen zu schnellen Druckaufbau und einen hohen Druckgradienten, wirkt sich dies direkt erhöhend auf die Amplitude der Förderdruckpulsation aus.

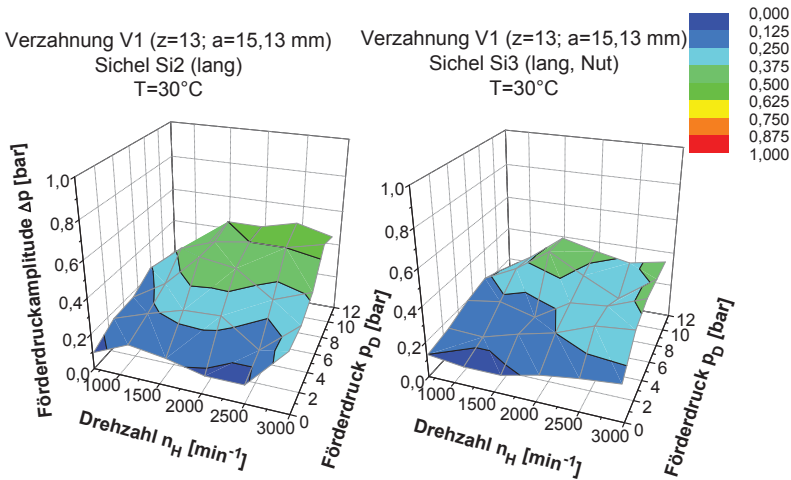
Für die Versuche aus Kapitel 7.2.3 werden für die verschiedenen Sichelstücke die Amplituden der Förderdrücke gemessen und die Einflüsse des Druckaufbaubereichs dabei untersucht. Über eine Umdrehung des Ritzels wird die Amplitude des Förderdrucks gegenüber dem gemittelten Förderdruck bestimmt (siehe Kapitel 5.3).

In Bild 7.28 werden für die Verzahnung V1 die Förderdruckamplituden  $\Delta p$  für die Sichel Si1 (kurz) und Si2 (lang) im Vergleich gezeigt. Vor allem im höheren Drehzahlbereich zeigt sich eine Verringerung der Amplitude um bis zu 0,35 bar. Je besser die Länge des Druckaufbaus der Sichelänge entspricht, umso weniger Schwingungen werden in den Förderdruckraum übertragen. Dies begünstigt eine direkte Minimierung der Amplitude des Förderdrucks.



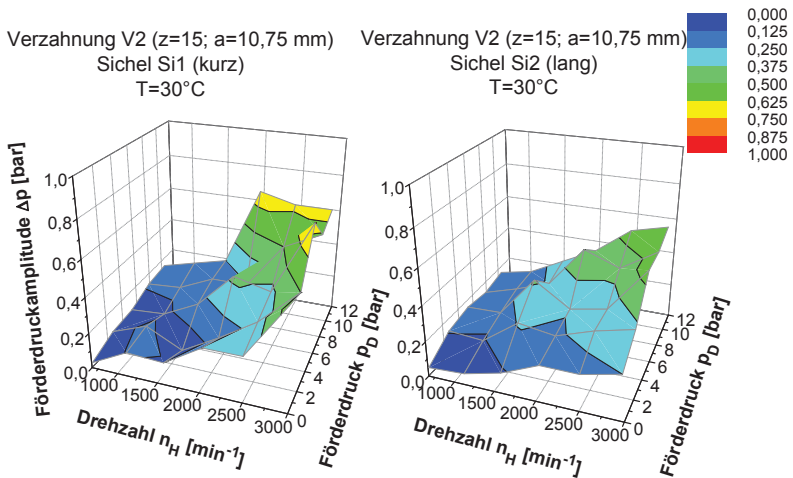
**Bild 7.28:** Förderdruckamplitude Sichel Si1 (kurz) und Sichel Si2 (lang) bei Verzahnung V1 ( $z=13$ ;  $a=15,13$  mm)

In Bild 7.29 werden für die Verzahnung V1 die Sichel Si2 (lang) und die Sichel Si3 (lang, Nut) gegenübergestellt. Die Sichel Si3 hat die gleichen Abmaße wie die Sichel Si2, ist jedoch mit Einlaufnuten versehen. Es ist ersichtlich, dass sich die Förderdruckamplitude in den Bereichen senkt, in denen nach Bild 7.26 die Längen des Druckaufbaubereichs näher an die Solllänge gebracht werden. Eine zusätzliche Druckamplitudensenkung von maximal 0,15 bar ist möglich.



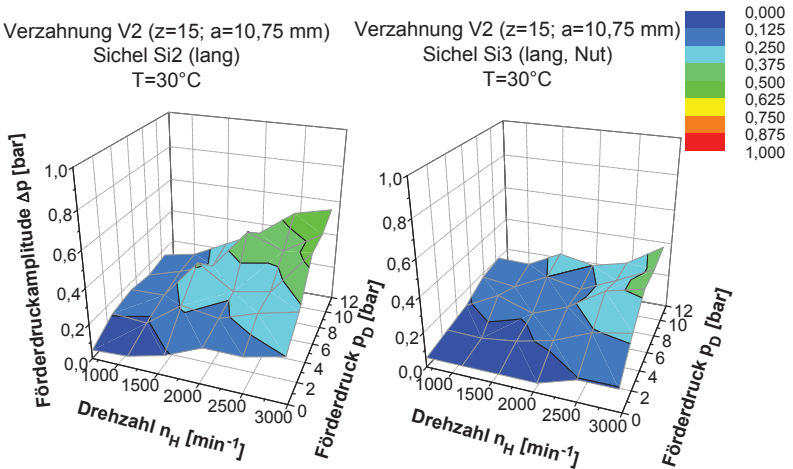
**Bild 7.29:** Förderdruckamplitude Sichel Si2 (lang) und Sichel Si3 (lang, Nut) bei Verzahnung V1 ( $z=13$ ;  $a=15,13$  mm)

In gleicher Weise werden für die Verzahnung V2 die kurze Sichel Si1 (kurz) gegenüber der verlängerten Sichel Si2 (lang) verglichen. Ähnlich wie bei der Verzahnung V1 ist mit der Sichel Si2 (lang) eine Reduzierung der Förderdruckamplitude von bis zu 0,38 bar erreichbar (Bild 7.30).



**Bild 7.30:** Förderdruckamplitude Sichel Si1 (kurz) und Sichel Si2 (lang) bei Verzahnung V2 ( $z=15$ ;  $a=10,75$  mm)

Mit der optimierten Sichel Si3 (lang, Nut) kann vor allem im höheren Drehzahlbereich eine weitere Senkung der Förderdruckamplitude um bis zu 0,23 bar erzielt werden. (Bild 7.31).



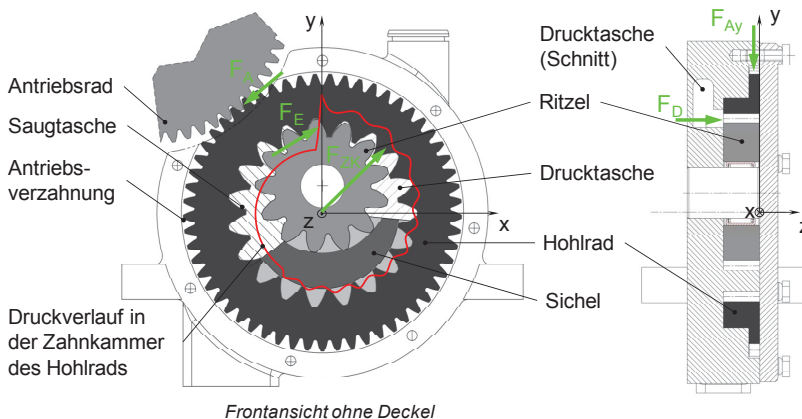
**Bild 7.31:** Förderdruckamplitude Sichel Si2 (lang) und Sichel Si3 (lang, Nut) bei Verzahnung V2 ( $z=15$ ;  $a=10,75$  mm)



## 8 Druckübergabe und Spaltänderung

### 8.1 Kräftewirkung am Hohlrad

Das Antriebsprinzip der hohlradgetriebenen Innenzahnradpumpe (vgl. Kapitel 3.2) zieht eine andere Antriebskrafteinleitung als bei ritzelgetriebenen Innenzahnradpumpen nach sich. Über die aus der Pumpe herausragende Antriebsverzahnung wird die Antriebskraft  $F_A$  in das Hohlrad eingeleitet (Bild 8.1). Dadurch wird am Verzahnungseingriff zwischen Pumpenritzel und Hohlrad die Kraft  $F_E$  erzeugt. Zusätzlich wirken noch die Kräfte aus den in den Zahnlücken herrschenden Drücken. Diese können zu einer resultierenden Gesamtkraft  $F_{ZK}$  zusammengefasst werden, die sich periodisch mit der Drehbewegung innerhalb einer Zahnteilung wiederholt. Da das Medium über eine axiale Drucktasche in den Förderraum an die axiale Druckübergabe im Verdrängungsbereich weitergeleitet wird, entsteht dort ein zusätzliches Druckfeld auf die Pumpenräder und somit eine einseitige axiale Kraft  $F_D$  auf die Zähne des Hohlrads.

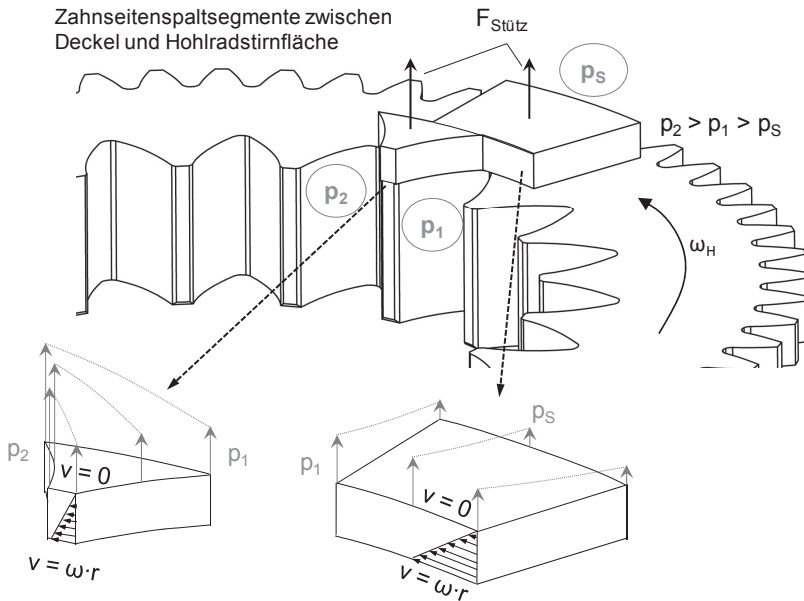


**Bild 8.1:** Kräfte am Pumpenhohlrad

Die zur Hohlradmitte exzentrisch angreifende Antriebskraft  $F_A$  und die Kraft  $F_D$  infolge des Druckfelds in der Drucktasche können das Hohlrad verkippfen. Die Verkippung bringt eine Veränderung der Nennspalte mit sich. Dabei kann die Verkippung so groß werden, dass das Hohlrad die Stirnflächen des Deckels oder des Gehäuses berührt, wenn der Schmierfilm im Dichtspalt nicht aufrecht erhalten werden kann. Dass der Schmierfilm im Dichtspalt trotzdem nicht sofort bei exzentrischer Krafteinleitung zusammenbricht, liegt daran, dass zum einen die Leckströme aus den Zahnluken im

Spalt zwischen der Stirnfläche des Hohlrads und des Deckels sowie des Gehäuses mit Druck beaufschlagt sind und somit eine Stützwirkung aufbauen (Bild 8.2).

Zum anderen bildet sich in der Spaltströmung eine hydrodynamische Kraft  $F_{\text{Stütz}}$  aus, die betragsmäßig abhängig von der Viskosität, der Drehzahl und dem Druckgefälle der Verkipfung entgegenwirkt [45].



**Bild 8.2:** Hydrodynamisch resultierende Stützkkräfte in den Seitenspaltssegmenten

Durch die einseitige Vergrößerung der Spalte verändern sich auch die Leckströme. Im ungünstigsten Fall vergrößern sich die Spalte so in der Pumpe, dass durch die Öffnung des Gehäuses an der Antriebsverzahnung ein erhöhter Leckstrom aus der Pumpe fließt. Die Förderleistung der Pumpe sinkt und somit wird der Wirkungsgrad der Pumpe kleiner. Die Leckströme steigen in der dritten Potenz zur Dichtspalthöhe an ( $Q \sim h^3$ ).

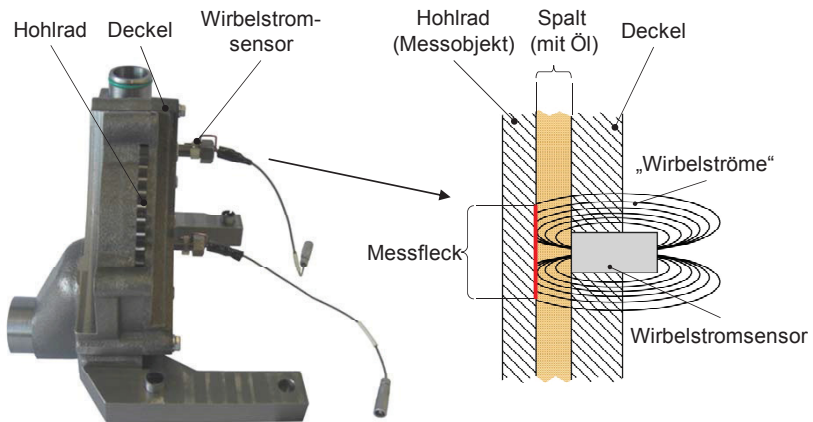
## 8.2 Versuche

### 8.2.1 Versuchsaufbau und Messtechnik

Zwischen Gehäusewand und Deckel bilden sich gegenüber den Stirnflächen der Pumpenräder Dichtspalte aus. Diese können grundlegend durch die Wahl der

Fertigungsmaße festgelegt werden und bewegen sich bei unkompensierten Zahnradpumpen im Bereich von 0,03-0,04 mm [42]. Wie in Kapitel 8.1 erwähnt, kann es bedingt durch das exzentrisch sitzende Antriebsrad am Hohlrad und der einseitigen Drucktasche bei hohlradgetriebenen Zahnradpumpen zu Verkippungen am Hohlrad kommen. Daher ist es von Interesse die absoluten Spaltmaße versuchstechnisch in der Pumpe zu erfassen, um so eine Aussage zur Betriebssicherheit bei verkippem Hohlrad zu bekommen.

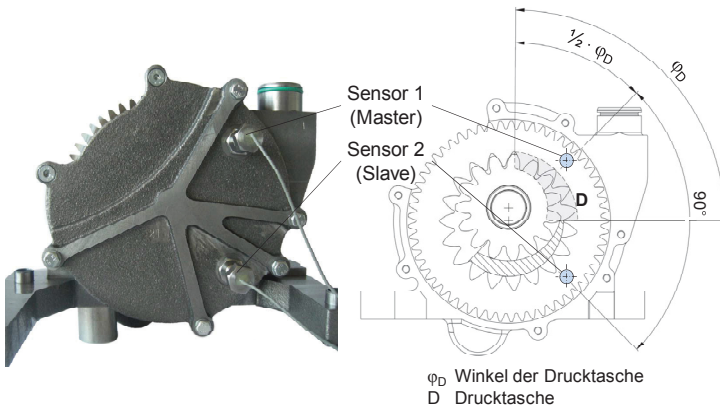
Die Sensoren für die Abstandsmessung arbeiten nach dem Wirbelstrom-Messprinzip (Bild 8.3). Im Sensor ist eine Spule eingebaut, die mit Wechselspannung versorgt wird. Dadurch entsteht um die Spule ein elektrisches Magnetfeld. Die Feldlinien treten aus der Sensorebene aus, passieren den Spalt und laufen über das Messobjekt (Hohlrad) wieder zur Sensorebene zurück. Das Magnetfeld induziert im elektrisch leitenden Messobjekt Wirbelströme [47].



**Bild 8.3:** Prinzip des Wirbelstrom-Messverfahrens

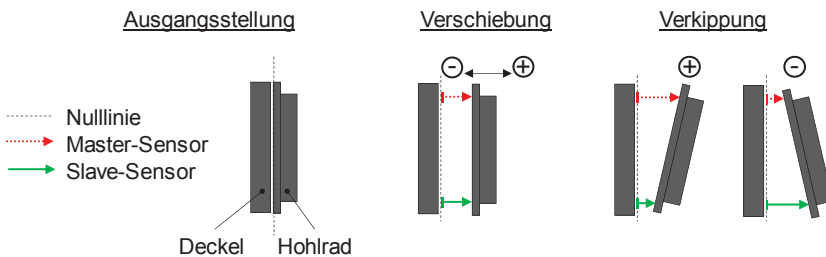
Die Wirbelströme wirken dem elektrischen Feld der Spule entgegen, so dass eine Änderung der Spulenimpedanz auftritt. Die Änderung des Abstands des Messobjekts zur Spule ist der Impedanzänderung proportional und kann umgerechnet als Spaltmaß genutzt werden. Wirbelstromsensoren können Isolatorschichten ungehindert durchdringen und messen somit durch Ölschichten fehlerfrei. Eine individuelle Kalibrierung und Linearisierung ist für jedes Messobjekt und jede Applikation erforderlich.

Im Deckel der Pumpe werden zwei Wirbelstrom-Abstandssensoren von *MICRO-EPSILON* angebracht (Bild 8.4). Ein Sensor (Master) erfasst den Spalt zwischen Hohlradstirnfläche und Deckel in der Mitte der Drucktasche. Der zweite Sensor (Slave) ist um 90° im Uhrzeigersinn verdreht angebracht, um Verkippungen der Hohlradstirnfläche gegenüber dem Deckel zu erkennen.



**Bild 8.4:** Positionierung der Wirbelstromsensoren im Deckel

Die Sensoren werden in Schutzhülsen eingeklebt. Dies hat zum einen den Vorteil, dass auf der Schutzhülse ein feineres Gewinde angebracht werden kann, um den Sensor genauer zu positionieren. Andererseits bietet die Hülse einen Schutz für den Sensor beim Berühren des Hohlrads mit der Messfläche. Die Sensoren werden über das Gewinde rechtwinklig zur messenden Fläche positioniert. Dabei wird ein Sicherheitsabstand von 0,04 mm eingehalten. Die Null-Referenz wird somit bei anliegendem Hohlrad geeicht. Eine Messgenauigkeit von  $\pm 1 \mu\text{m}$  kann mit diesen Maßnahmen erreicht werden. Die Definitionen von Verschiebung und Verkipfung, sowie die Festlegung der positiven und negativen Richtung zeigt Bild 8.5.



**Bild 8.5:** Definition der Verschiebungs- und Verkipprichtung

Die technischen Daten der verwendeten Wirbelstromsensoren sind in Tabelle 8.1 aufgeführt [55].

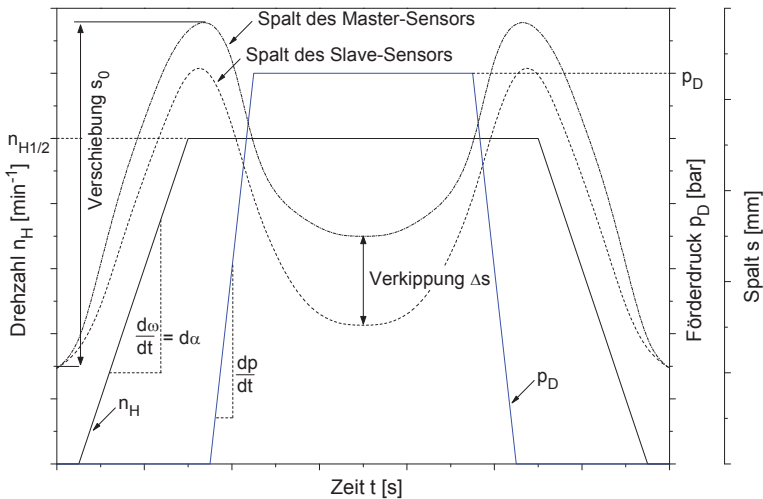


**Tabelle 8.1:** Technische Daten der Wirbelstromsensoren

<b>Daten</b>	<b>Einheit</b>	<b>Kennwert</b>
<i>Messbereich MB</i>	mm	0,4
<i>Linearität</i>	mm	$\leq \pm 0,8 \cdot 10^{-3}$
<i>Auflösung (bei 20kHz)</i>	mm	$\leq 0,04 \cdot 10^{-3}$
<i>Temperaturstabilität</i>	mm / °C	$\leq \pm 0,06 \cdot 10^{-3}$

### 8.2.2 Erweitertes Versuchsprogramm

Die Spaltemessungen werden für die Betriebszustände mit fest eingestelltem Förderdruck und fest eingestellter Drehzahl bei festgelegter Temperatur durchgeführt (vgl. Tabelle 5.2). Dazu werden die Wirkungsgrade für die einzelnen Betriebszustände erfasst. Somit können Aussagen darüber gemacht werden, wie die Verkippung des Hohlrads über den Förderdruck, die Drehzahl und die Temperatur beeinflusst wird und wie der Wirkungsgrad von der Verkippung abhängig ist. Da die untersuchten Pumpen im praktischen Einsatz nicht nur in stationären Betriebszuständen mit konstanter Drehzahl und konstantem Förderdruck betrieben werden, ist es gerade bei der Spaltemessung unerlässlich, zusätzlich die dynamischen Effekte zu untersuchen. Dazu werden sogenannte Hochläufe untersucht (Bild 8.6). Die Drehzahl und der Förderdruck werden nacheinander von Null auf die Soll-Werte ( $n_{H1} = 1500 \text{ min}^{-1}$  bzw.  $n_{H2} = 3000 \text{ min}^{-1}$  und  $p_D = 12 \text{ bar}$ ) erhöht (Bild 8.6). Somit können die Einflüsse der Winkelbeschleunigung  $\alpha_H$  ( $\alpha_{H1} = 4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$ ;  $\alpha_{H2} = 8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$ ) und der Druckänderung  $dp/dt$  ( $1,5 \text{ bar}\cdot\text{s}^{-1}$ ) auf die Kippneigung untersucht werden. In den oben genannten Bereichen der Winkelbeschleunigung und der Druckänderung werden die Verschiebung  $s_0$  und die Verkippung  $\Delta s$  des Radialspalts am Hohlrad erfasst. Die Verkippung  $\Delta s$  nimmt positive und negative Werte an. Durch die Differenz zwischen Master- und Slave-Sensor bedeutet beispielsweise eine positive Verkippung, dass sich das Hohlrad gegenüber dem Master-Sensor weiter entfernt vom Deckel als vom Slave-Sensor befindet.



**Bild 8.6:** Hochläufe zur Bestimmung der dynamischen Einflüsse von Winkelbeschleunigung  $d\omega/dt$  und Druckänderung  $dp/dt$  auf die Verkipfung  $\Delta s$  und Verschiebung  $s_0$

### 8.2.3 Versuchsparameter

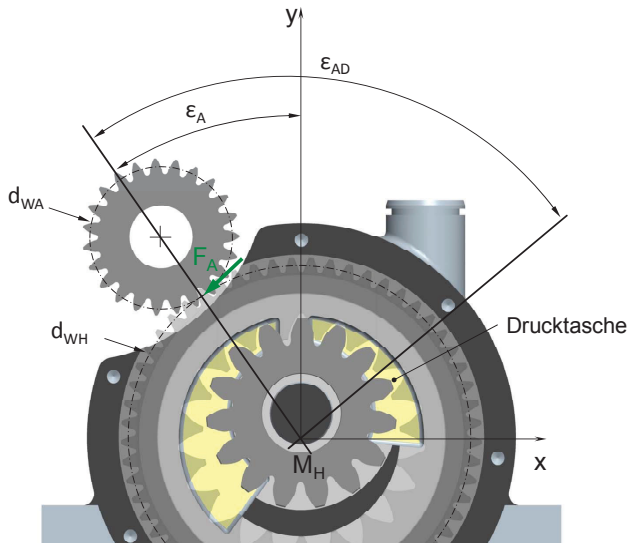
Um eine allgemeine Aussagefähigkeit über die Spaltänderung und die Verkipfungen am Hohlradkörper zu bekommen, werden die folgenden aufgeführten geometrischen Parameter zusätzlich zum Versuchsprogramm aus Kapitel 5.4 an den Pumpen variiert. Da die Kraft  $F_A$  der Krafteinleitung aus der Antriebsverzahnung und die Kraft  $F_D$  der Druckbelastung der einseitigen Drucktasche unvermeidbar sind, ist es erforderlich zu prüfen, inwiefern diese die Lage des Hohlrades und damit die Spalte, die Verkipfung und den Wirkungsgrad beeinflussen. Nach diesen Erkenntnissen sind Gestaltungsrichtlinien für das Gehäuse und das Hohlrad abzuleiten.

#### Axiale Spaltmaße

Für die einzelnen Versuche stehen zwei Hohlräder (Hohlrad 2a und Hohlrad 3a) zur Verfügung, die bewusst so auf die Zahnbreite abgeschliffen werden, dass verschiedene axiale Spaltmaße in Kombination mit den Pumpengehäusen zustande kommen (Tabelle 8.2). Die Untersuchungen sollen vor allem aufzeigen, in welcher Toleranzbreite Spaltmaße einzuhalten sind und ob die Literaturempfehlungen, u.a. nach [42], für hohlradgetriebene Pumpen anwendbar sind. Des Weiteren sollen die Versuche darstellen, inwiefern die Verkipfung vom axialen Spaltmaß abhängig ist.

### Lage des Antriebseingriffs und der Drucktasche

Der Antriebswinkel  $\varepsilon_A$  beschreibt den Winkel zwischen den sich kreuzenden Linien der y-Achse mit der Linie zwischen dem Mittelpunkt des Antriebsritzels und dem Pumpenhohlradmittelpunkt  $M_H$  (Bild 8.7). Die Variation des Winkels bewirkt eine Variation der Wirklinie der Antriebskraft  $F_A$ . Da die Drucktasche in den Versuchspumpen durch die Druckübergabe ortsgebunden ist, werden die Auswertungen der Spaltverläufe zusätzlich über den Winkel  $\varepsilon_{AD}$  ausgewertet (Bild 8.7). Dieser Winkel ist definiert zwischen der Linie von Hohlradmitte  $M_H$  zu der Mitte der Drucktasche und der sich kreuzenden Linie von dem Schnittpunkt der Wälzkreise von der Antriebsverzahnung am Hohlrad  $d_{WH}$  und der Antriebsverzahnung  $d_{WA}$  an der Maschine bezogen auf den Hohlradmittelpunkt. Durch die Kombination von verschiedenen Antriebsrädern in unterschiedlichen Pumpengehäusen stehen die Variationen nach Tabelle 8.2 zur Verfügung.

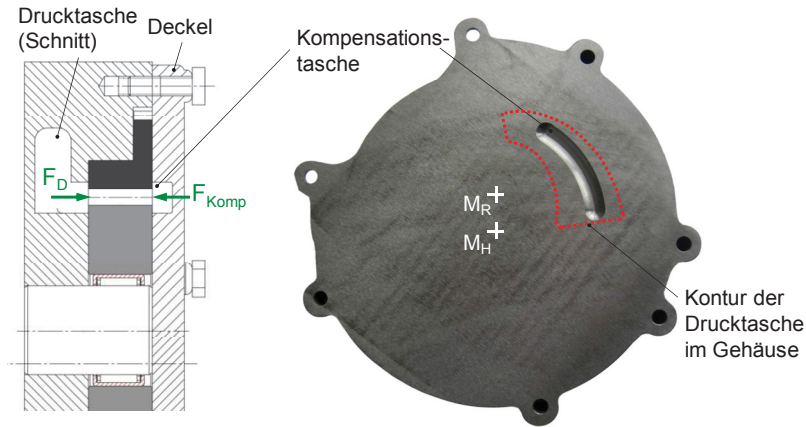


**Bild 8.7:** Lage des Antriebswinkels  $\varepsilon_A$  zur y-Achse und relativ zur Drucktasche  $\varepsilon_{AD}$

### Kompensationstasche

Für die Kompensation der Verkipfung der Pumpenräder kann im axialen Pumpendeckel eine sogenannte Kompensationstasche eingebracht werden (Bild 8.8). Die Platzierung erfolgt so im Deckel, dass gegenüber der Drucktasche des Pumpengehäuses eine ringförmige Nut gefräst wird. Diese bewirkt, dass das Fluid über die

Zahnlücken auf die gegenüberliegende Seite im Deckel in die Kompensationstasche des Deckels fließt und somit eine beidseitig ähnlich große Druckbelastung auf das Hohlrad ausübt. Jedoch wird durch eine Kompensationstasche der axiale Spalt vergrößert. Eine Spaltvergrößerung geht einher mit einer Zunahme an Leckverlusten. Somit ist zu prüfen, ob und bei welchen Betriebszuständen eine Kompensationstasche benötigt wird (Tabelle 8.2).



**Bild 8.8:** Kompensationstasche im Pumpendeckel

Alle oben aufgeführten Parameter werden in der folgenden Tabelle 8.2 zusammengefasst.

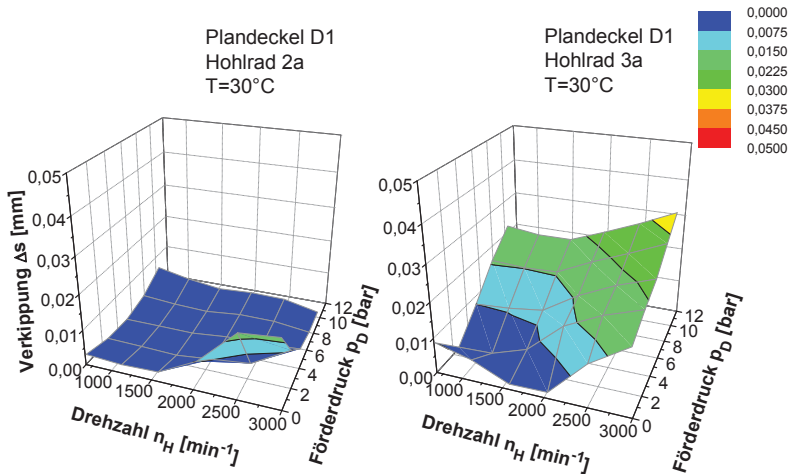
**Tabelle 8.2:** Variationen der Parameter für die Spaltmessungen

Einflussgröße	Formelzeichen	Einheit	Variationen
Antriebswinkel	$\epsilon_A$	°	-43 ; -38 ; -9 ; -3 ; 10 ; 17
Antriebswinkel relativ zu Drucktasche	$\epsilon_{AD}$	°	33 ; 40 ; 53 ; 59 ; 88 ; 93
Max. axiales Spaltmaß	s	mm	0,045 (mit Hohlrad 2a) 0,090 (mit Hohlrad 3a)
Deckel	D		D1 (Plandeckel) ; D2 (Kompensationstasche)

### 8.3 Auswertungen der Spaltmessungen

#### 8.3.1 Einfluss von Drehzahl, Förderdruck und Temperatur auf die Hohlrad- verkipfung und den Wirkungsgrad

Unter gleichbleibender Öltemperatur bei 30 °C bzw. 80 °C werden der Druck- und der Drehzahleinfluss auf die Verkipfung des Hohlrads in der Pumpe ohne kompensierende Maßnahmen untersucht (Bild 8.9). Die volumetrischen Wirkungsgrade werden im Vergleich der Pumpen mit dem Hohlrad 2a und dem Hohlrad 3a für eine Drehzahl von  $750 \text{ min}^{-1}$  und  $3000 \text{ min}^{-1}$  bei einer Öltemperatur von 30 °C und 80 °C abgetragen (Bild 8.11). Für die stationären Betriebspunkte werden die Verkipfungen aufgezeigt, die zwischen dem Master- und Slave-Sensor ermittelt werden (Bild 8.9 und Bild 8.10).

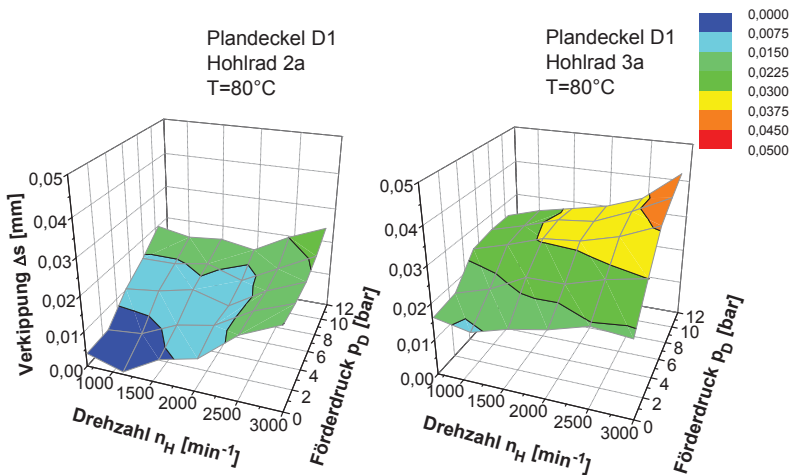


**Bild 8.9:** Verkipfungen des Hohlrads 2a im Vergleich zum Hohlrad 3a für  $T = 30 \text{ °C}$

Es ist ersichtlich, dass für das geringere axiale Spaltmaß (Bild 8.9 links) bei 30 °C kaum eine Verkipfung unter dem Einfluss der Betriebsparameter auftritt. Lediglich im Bereich von hohen Drehzahlen ( $2500 - 3000 \text{ min}^{-1}$ ) unter geringem Förderdruck tritt eine Verkipfung des Pumpenhohlrads bis 0,015 mm auf, welche im Vergleich kaum den Wirkungsgrad beeinflusst (Bild 8.11). Der zur Kompensation nötige Druck ist in diesem Zustand in den Spaltsegmenten nicht vorhanden, somit kann die Verkipfung durch die Antriebskraft nicht kompensiert werden. Für das größer gewählte axiale Spaltmaß mit dem Hohlrad 3a ergibt sich unter 30 °C bei einer kinematischen

Viskosität des Öls von  $\nu_{\text{Öl}} = 50 \text{ mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  eine größere Verkipfung von bis zu 0,032 mm (Bild 8.9 rechts). Dabei nimmt die Verkipfung mit steigendem Förderdruck und steigender Drehzahl zu. Der Einfluss der größeren Spaltmaße ist am Wirkungsgrad erkennbar. Im Gegensatz zum Hohlrad 2a ist der Wirkungsgrad mit dem Hohlrad 3a geringer (Bild 8.11).

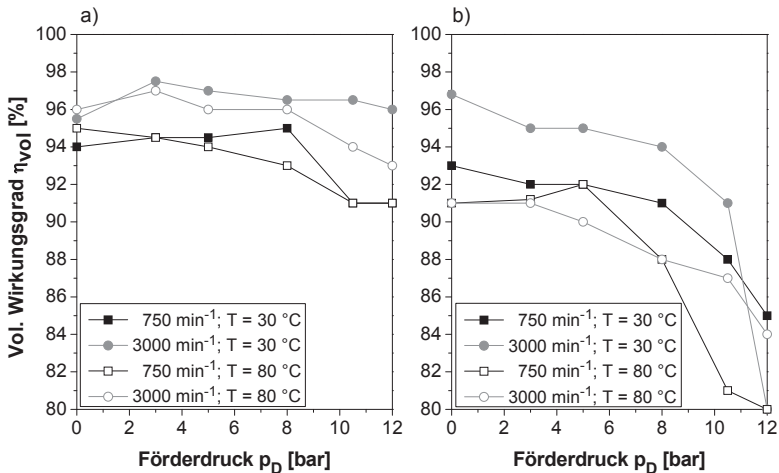
Bei einer Öltemperatur von  $80^\circ\text{C}$  lässt sich erkennen, dass das Öl infolge der geringeren Viskosität ( $\nu_{\text{Öl}} = 8,8 \text{ mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ) weniger Stützkraft gegen die Verkipfung aufbaut und die Aufrechterhaltung eines konstanten Schmierfilms zwischen Pumpenrad und Deckel schwerer fällt (Bild 8.10). Somit sind mit dem Hohlrad 2a Verkipfungen bis zu 0,025 mm und mit dem Hohlrad 3a Verkipfung bis zu 0,05 mm erkennbar. Mit steigendem Förderdruck und steigender Drehzahl nimmt auch die Verkipfung zu.



**Bild 8.10:** Verkipfungen des Hohlrads 2a im Vergleich zu Hohlrad 3a für  $T = 80^\circ\text{C}$

Bei der Ermittlung der volumetrischen Wirkungsgrade weisen die Ergebnisse bei einer Drehzahl von  $750 \text{ min}^{-1}$  stets geringere Werte als bei einer Drehzahl von  $3000 \text{ min}^{-1}$  auf (Bild 8.11). Die geringere Beschleunigung und Bewegungsgeschwindigkeit des Öls verursacht einen höheren Leakagestrom, da die Trägheit des Öls der Verdrängung durch die Pumpenräder entgegenwirkt. Dieser Effekt ist bei einer Temperatur von  $80^\circ\text{C}$  im Vergleich zur höheren Drehzahl von  $3000 \text{ min}^{-1}$  weniger ausgeprägt, da die Trägheit des Öls infolge der niedrigeren Viskosität sinkt. Mit steigender Temperatur und der damit verbundenen Viskositätssenkung sinkt jedoch der Wirkungsgrad infolge der Spalterweiterung durch die Verkipfung. Der volumetrische Wirkungsgrad ist bei den Pumpen mit Hohlrad 3a gegenüber den Pumpen mit Hohlrad 2a kleiner. Zudem lassen sich bereits leichte einseitige Anlaufspuren des Hohlrads

3a am Deckel infolge der großen Verkippungen erkennen. Bei höheren Temperaturen und einem Förderdruck über 5 bar stellt sich eine deutliche Verminderung des volumetrischen Wirkungsgrades mit dem Hohlrad 3a ein (Bild 8.11). Diese Erkenntnisse zeigen eine starke Abhängigkeit des Wirkungsgrads von der Verkippung des Hohlrads auf.



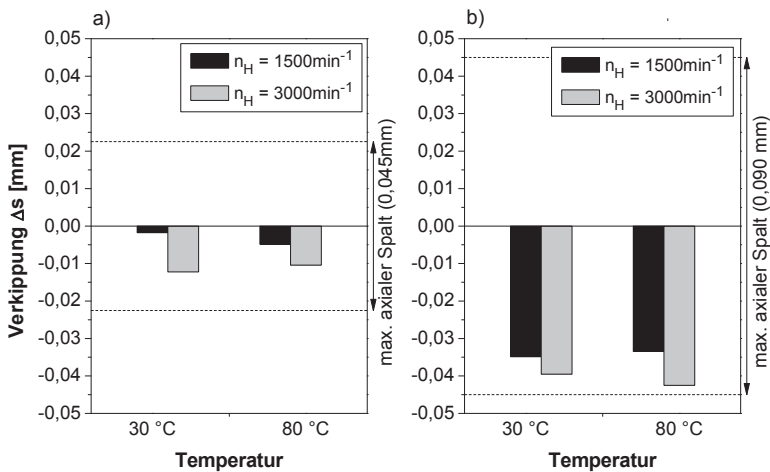
**Bild 8.11:** Vergleich der volumetrischen Wirkungsgrade der Pumpenvarianten mit a) Hohlrad 2a und b) Hohlrad 3a über dem Förderdruck bei verschiedenen Drehzahlen und Temperaturen

### 8.3.2 Axiale Spaltmaßänderung unter dem Einfluss sich dynamisch verändernder Betriebsbedingungen

Mit den dynamischen Versuchen sollen die Einflüsse von Beschleunigungs- und Druckänderungseffekten auf die Pumpenhohlräder 2a und 3a bei Temperaturen von 30 °C und 80 °C zuerst ohne kompensierende Maßnahmen untersucht werden (siehe Kapitel 8.2.2). Die Auswertungen der Verkippungen werden so dargestellt, dass über die Verschiebungen (siehe Bild 8.6) die Ergebnisse der Verkippung auf die Mittellinie normiert sind, d.h. die Nulllinie beschreibt die Mittellage des Hohlrades in dem zur Verfügung stehenden Raum des axialen Spalts. Zusätzlich sind dazu die maximalen axialen Spalte aufgezeigt. Somit ist erkennbar, in welche Richtung sich die Verkippung bewegt und wie groß die Verkippung im Verhältnis zum verfügbar nutzbaren Spalt ist.

Bei einer Druckänderung um  $1,5 \text{ bar} \cdot \text{s}^{-1}$  bei einer bestehenden Drehzahl erkennt man in Bild 8.12, dass generell bei der Drehzahl von  $1500 \text{ min}^{-1}$  eine kleinere Verkippung

als bei der Drehzahl von  $3000 \text{ min}^{-1}$  auftritt. Alle Verkipnungen sind negativ. Für das geringere axiale Spaltmaß beim Hohlrad 2a ergeben sich Verkipnungen zwischen  $-0,003 \text{ mm}$  und  $-0,012 \text{ mm}$ . Dies entspricht einem Verkipnungsweg von 50 % des mittleren Spaltmaßes bezogen auf einen gemittelten Spalt rechts und links vom Hohlrad. Für niedere und hohe Temperaturen sind die Werte annähernd gleich groß. Beim größeren axialen Spaltmaß wie es sich mit Hohlrad 3a ergibt, liegen die Verkipnungen zwischen  $-0,034$  und  $-0,041 \text{ mm}$ . Im Verhältnis zum größtmöglichen Spaltmaß ergibt sich damit ein prozentualer Anteil von bis zu 94 %. Es werden erhöhte Leckströme und teilweise Anlaufspuren am Deckel der Pumpen mit Hohlrad 3a erkennbar.

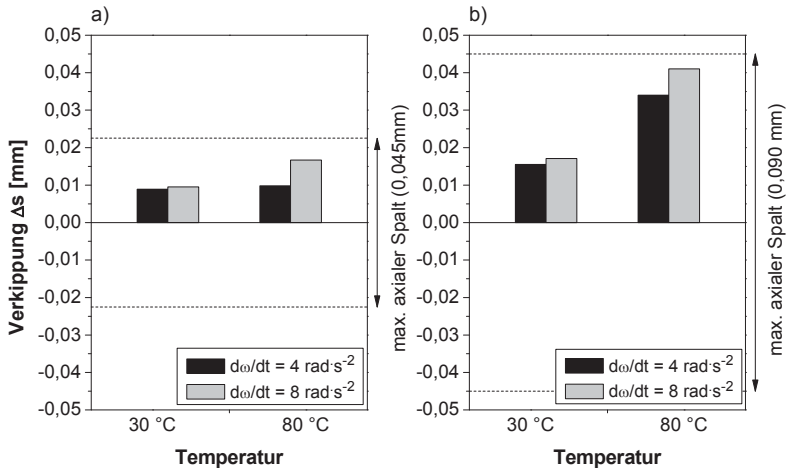


**Bild 8.12:** Verkipnungen der Hohlräder bei Druckänderung  $dp/dt$  für zwei axiale Spaltmaße mit a) Hohlrad 2a (0,045 mm) und b) Hohlrad 3a (0,090 mm)

Aus den Untersuchungen bei Winkelbeschleunigungen, die durch die Drehzahländerung des Hohlrads erzeugt werden, resultieren die Ergebnisse nach Bild 8.13. Dabei werden zwei verschiedene Ziel-Drehzahlen ( $1500 \text{ min}^{-1}$  und  $3000 \text{ min}^{-1}$ ) mit den jeweiligen Winkelbeschleunigungen ( $4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$  und  $8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$ ) vom Stand aus beschleunigt. Die Winkelbeschleunigung erzeugt generell eine positive Verkipnung. Das bedeutet, dass sich das Hohlrad zur Drucktasche im Gehäuse neigt. Dies liegt daran, dass die während der Beschleunigungsphase angreifende Antriebskraft entsprechend größer wird. Für das kleinere axiale Spaltmaß bei Hohlrad 2a ergeben sich bei einer Öltemperatur von  $30 \text{ °C}$  Verkipnungen von  $0,010 \text{ mm}$  und für das niederviskosere Öl bei  $80 \text{ °C}$  Verkipnungen von bis zu  $0,018 \text{ mm}$ . Größere Verkipnungen stellen sich bei größeren Spaltmaßen mit Hohlrad 3a ein. Für eine Öltemperatur von  $30 \text{ °C}$



ergeben sich Verkipnungen bis 0,020 mm, während sich bei 80 °C und niedriger Viskosität der Einfluss nahezu verdoppelt. Die Verkipfung nimmt Werte von bis zu 0,042 mm an, die bei einem maximalen axialen Spaltmaß von 0,045 mm wenig Sicherheit gegen das Berühren des Hohlrads mit den Gehäusebauteilen bietet.



**Bild 8.13:** Verkipnungen der Hohlräder bei Winkelbeschleunigung  $d\omega/dt$  für zwei axiale Spaltmaße mit a) Hohlrad 2a (0,045 mm) und b) Hohlrad 3a (0,090 mm)

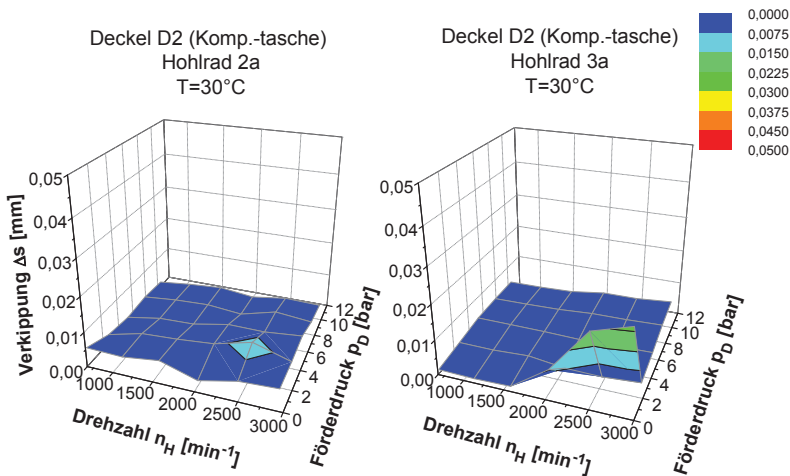
### 8.3.3 Einfluss des Winkels $\varepsilon_A$ und $\varepsilon_{AD}$ unter dynamischen Bedingungen

Über die Lage des Winkel  $\varepsilon_A$  kann nach den erfolgten dynamischen Spaltemessungen und Untersuchungen der Verkipfung bei festen Betriebspunkten keine Aussage zur optimalen Lage gemacht werden. Die Vermutung liegt nahe, dass unter dem geringen Einfluss der Antriebskraft  $F_A$  die Kraft  $F_D$  infolge des Druckfeldes an der Drucktasche überwiegt ( $F_D \gg F_A$ ). Es ist jedoch zu beachten, dass bei der Wahl der Lage des Antriebseingriffs und der damit verbunden Öffnung des Gehäuses ein großer Abstand zur Drucktasche und somit ein großer Winkel  $\varepsilon_{AD}$  zu wählen ist. Der Spalt, der dadurch entsteht und durch den das Lecköl aus der Pumpe fließt, wird somit verlängert und das Ausfließen des Leckagestroms vermindert.

### 8.3.4 Druckausgleich durch die Kompensationstasche

Als Gegenmaßnahme für die Verkipfung des Hohlrads für eine bessere Ausnutzung des Wirkungsgrads und der Gefahr von Bauteilverschleiß vorzubeugen, wird eine Kompensationstasche (Kapitel 8.2.3) in den Deckel eingebracht.

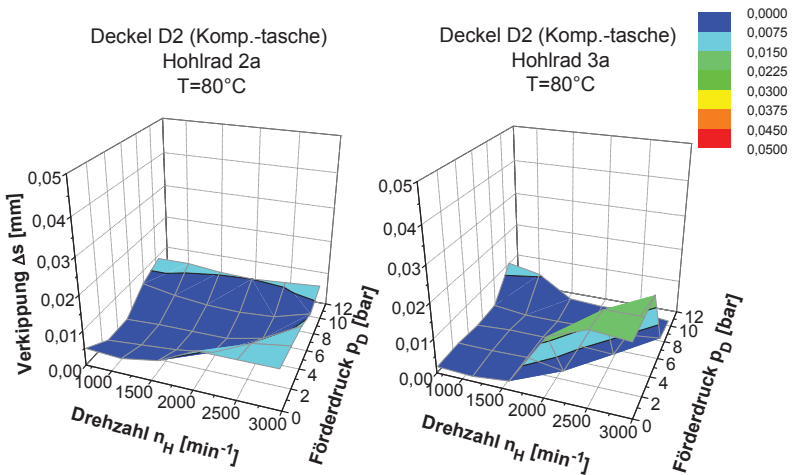
Für die Betriebspunkte mit fest eingestellten Förderdrücken und Drehzahlen bei einer Temperatur von 30 °C ergeben sich die Auswertungen der Verkipfungen nach Bild 8.14. Über dem kompletten Bereich zeigen sich für das geringe axiale Spaltmaß mit dem Hohlrad 2a sehr geringe Verkipfungen (maximal 0,007 mm), während sich für die größere axiale Spaltbreite ebenfalls eine Kompensation der Verkipfung einstellt. Jedoch tritt im Bereich von hohen Drehzahlen bei geringen Förderdrücken eine kleine Verkipfung auf.



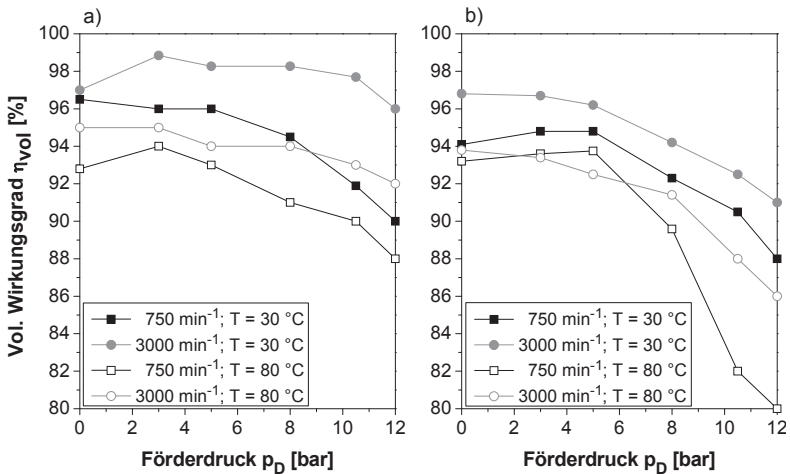
**Bild 8.14:** Verkipfungen des Hohlrads 2a im Vergleich zu Hohlrad 3a für T = 30 °C mit dem Einsatz einer Kompensationstasche im Deckel

Bei einer Temperatur von 80 °C sind die Ergebnisse der Verkipfung in Bild 8.15 dargestellt. Auf sehr geringe Verkipfungen kommt man mit Hohlrad 2a und der Kompensationstasche. Im Bereich hoher Drehzahlen werden bei niederem und hohem Förderdruck, sowie bei geringen Drehzahlen und hohem Förderdruck die Verkipfungen weniger kompensiert. Die hierbei auftretenden Werte von 0,009 mm sind jedoch immer noch gering im Gegensatz zum Betrieb ohne kompensierende Maßnahmen. Mit dem Hohlrad 3a können vor allem im Bereich der hohen Drehzahl unter geringem

Förderdruck keine wesentlichen Verbesserungen über eine Kompensationstasche ausgemacht werden.



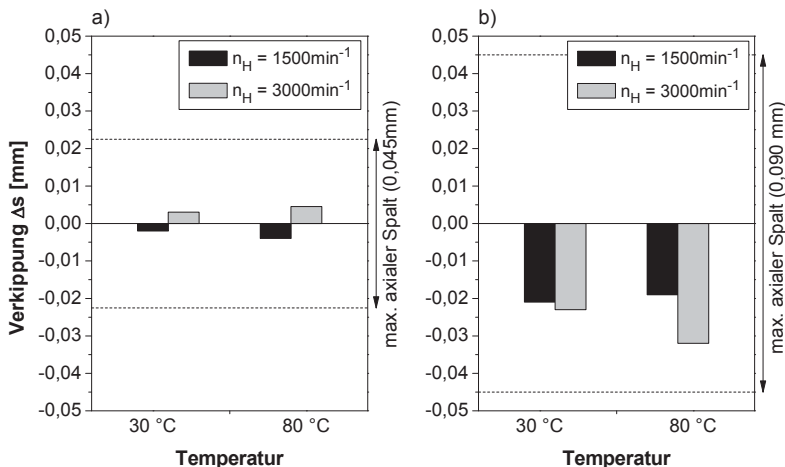
**Bild 8.15:** Verkipfungen des Hohlrads 2a im Vergleich zu Hohlrad 3a für  $T = 80^\circ\text{C}$  beim Einsatz einer Kompensationstasche im Deckel



**Bild 8.16:** Vergleich der volumetrischen Wirkungsgrade der Pumpenvarianten mit a) Hohlrad 2a und b) Hohlrad 3a über dem Förderdruck bei verschiedenen Drehzahlen und Temperaturen mit Kompensationstasche

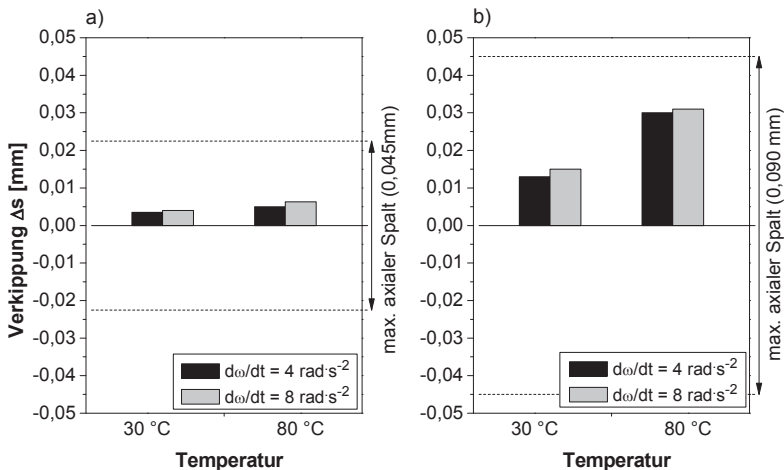
Am Verlauf des volumetrischen Wirkungsgrades ist eine Verbesserung mit der Kompensationstasche für Hohlrad 2a vor allem bei Öltemperaturen von 80 °C ersichtlich (Bild 8.16). Bei einer Öltemperatur von 30 °C verschlechtern sich die Wirkungsgrade um ca. 5 % gegenüber dem unkompensierten Aufbau. Die ohnehin schon geringen Verkippungen bei 30 °C ohne Kompensationstasche verursachen somit keine wesentlichen Spaltveränderungen, die sich mindernd auf den Wirkungsgrad auswirken. Für das größer gewählte axiale Spaltmaß mit dem Hohlrad 3a ergibt sich eine Verschlechterung des Wirkungsgrades bei höheren Förderdrücken. Der Effekt der Kompensationstasche bewirkt zwar einen Ausgleich der Verkippung des Hohlrads, jedoch nimmt der axiale Spalt, der schon allein durch die Abmaße größer gewählt wird, durch die Kompensationstasche weiter zu und verursacht somit größere Leckströme, als durch die Kompensation der Verkippung vermieden werden.

Der Einfluss der Druckänderung  $dp/dt$  mit der Kompensationstasche ist in Bild 8.17 ersichtlich. Diese bewirkt eine Verminderung der Verkippungen mit dem Hohlrad 2a. Für die Drehzahl von  $3000 \text{ min}^{-1}$  lässt sich sogar eine Änderung der Richtung der Verkippung erkennen. Dieses Ergebnis stellt klar heraus, dass die Druckänderungen mit Pumpen, die eine Kompensationstasche besitzen, insgesamt weniger Einfluss auf die Richtung der Verkippungen haben. Weniger Einfluss zeigt der Einsatz der Kompensationstasche bei größer gewählten axialen Spaltmaßen. Die Verkippungen werden lediglich um 0,005 – 0,008 mm verringert.



**Bild 8.17:** Verkippungen der Hohlräder bei Druckänderung  $dp/dt$  für zwei axiale Spaltmaße mit a) Hohlrad 2a (0,045 mm) und b) Hohlrad 3a (0,090 mm) mit einer Kompensationstasche

Der Effekt der Kompensationstasche ist für die Versuche mit Winkelbeschleunigungen bezüglich der Verkippsänderung weniger ausgeprägt (Bild 8.18). Die Verkippsungen entsprechen sowohl für das Hohlrad 2a als auch für das Hohlrad 3a nahezu den gemessenen Werten ohne Kompensationstasche. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Beschleunigungskraft auf das Hohlrad ohne Förderdruck denselben Einfluss wie bei den unkompensierten Pumpen ausübt und die Kompensation der Drucktasche somit noch keinen Einfluss nimmt. Erst bei höheren Förderdrücken würde sich dieser gewünschte Kompensationseffekt ergeben.

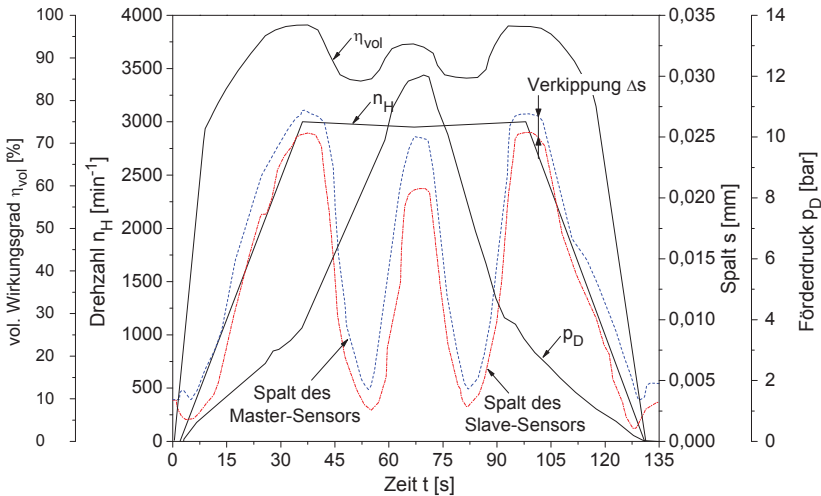


**Bild 8.18:** Verkippsungen der Hohlräder bei Winkelbeschleunigung  $d\omega/dt$  für zwei axiale Spaltmaße mit a) Hohlrad 2a (0,045 mm) und b) Hohlrad 3a (0,090 mm) mit Kompensationstasche

## 8.4 Entwicklung des axialen Spalts unter dynamischen Bedingungen

In Bild 8.19 wird die Entwicklung der Spalte, die am Master- und am Slave-Sensor gemessen werden unter dynamischen Bedingungen mit dem Hohlrad 2a (max. Spalt  $s = 0,045$  mm) und mit einer Kompensationstasche aufgezeigt. Dabei wird die Hohlradrehzahl  $n_H$  von 0 auf  $3000 \text{ min}^{-1}$  und anschließend der Förderdruck  $p_D$  von 0 auf 12 bar erhöht. Der Förderdruck wird mit der Hohlradbeschleunigung aufgrund der Erhöhung des Volumenstroms bereits leicht angehoben. Deutlich ist zu sehen, dass sich bei der Hohlradbeschleunigung der Spalt aus der Nulllage (Anlage der Hohlradstirnfläche am Deckel) über die Mittellage herausbewegt. Im Anschluss daran wird bei konstanter Drehzahl ein konstantes Spaltniveau gehalten. Wird der Förderdruck explizit erhöht, verschiebt sich das Hohlrad wieder in Richtung des Deckels. Ist die

Druckänderungsphase beendet, kann man ebenfalls ein konstantes Spaltniveau in Mittellage erkennen. Bei negativer Druckänderung sowie bei negativer Winkelbeschleunigung stellen sich die umgekehrten Effekte ein, so dass sich eine nahezu symmetrische Abhängigkeit der Druckänderungs- und Drehzahländerungseffekte ergibt. Die Verkipfung liegt bei der Messung bei maximal 0,0046 mm und ist dabei immer positiv (Master > Slave). Der volumetrische Wirkungsgrad  $\eta_{\text{vol}}$  wird über den gesamten zeitlichen Verlauf erfasst. Dabei wird deutlich, dass Spaltänderungen mit einer Minderung des volumetrischen Wirkungsgrads einhergehen.

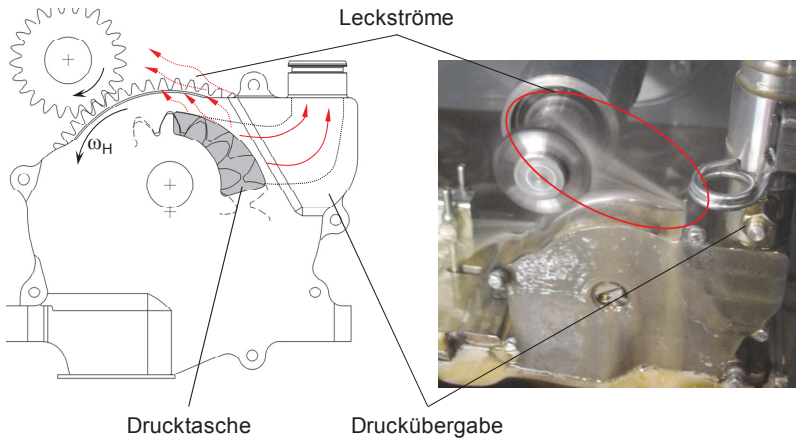


**Bild 8.19:** Entwicklung eines Spalts unter dynamischen Bedingungen mit Hohlrad 2a (0,045 mm) und einer Kompensationstasche

## 8.5 Korrelation der Spaltmessungen mit dem Berechnungsmodell des Druckverlaufs in der Zahnkammer

Der im Kapitel 7 analytisch ermittelte Druckverlauf in der Zahnkammer basiert auf der Annahme von axialen und radialen Spaltmaßen, mit denen die Spaltsegmente berechnet werden und aus deren Massenströme sich die Drücke in den Zahnkammern ermitteln lassen. Daher wird mit den ermittelten Verkipfungen der Spaltmaße der Druckverlauf in der Zahnkammer neu berechnet. Es zeigt sich jedoch durch die gleichmäßige Zunahme des Spalts keine wesentlichen Änderungen in den Ergebnissen der Druckverläufe. Die Verkipfungen wirken sich weniger auf den Druckverlauf als auf den Wirkungsgrad der Pumpe aus. Die Vermutung liegt nahe, dass durch die Verkipfung an der Drucktasche der hydraulische Widerstand am Seitenspalt kleiner als in der Drucktasche selbst wird. Daher fließt das Öl nicht in die Drucktasche

sondern über die axialen Spalte und somit durch das Druckgefälle über die Antriebsverzahnung aus der Pumpe (Bild 8.20). Deshalb wird das Modell über den Druckverlauf in der Zahnkammer beibehalten, weil das Öl wie in der Annahme aus den Zahnkammern verdrängt wird jedoch in der Drucktasche und in der Druckleitung fehlt. Diese Annahme bestätigt sich, da mit steigender Temperatur und fallender Viskosität weniger Öl gefördert wird und die gemessenen Druckverläufe weiterhin übereinstimmen. Jeder berechnete hydraulische Widerstand steht mit dem nachfolgenden und vorhergehenden in Reihe, somit ist nur das Verhältnis zueinander von Interesse. Dies wird durch die Messungen bestätigt. Die Auswirkungen der Verkipnungen haben den größten Einfluss auf die volumetrischen Wirkungsgrade. Somit können die Annahmen aus dem Modell vor allem bei Niederdruckpumpen bestätigt werden.



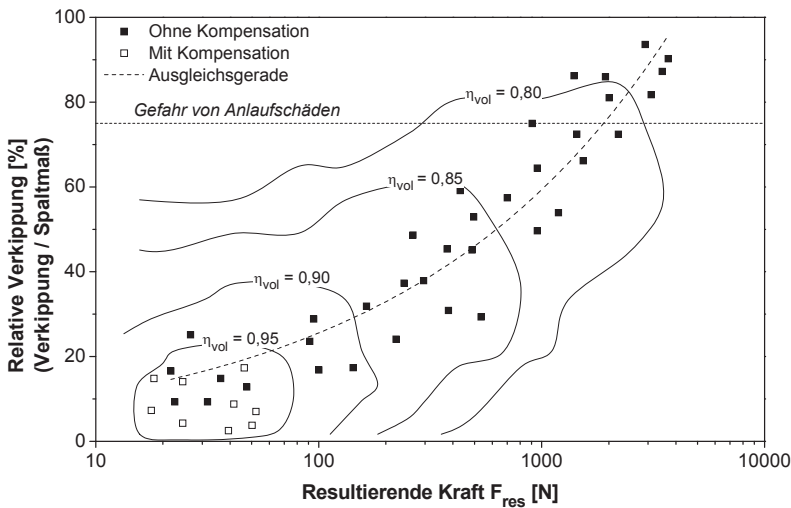
**Bild 8.20:** Leckströme, die über die Antriebsverzahnung aus der Pumpe austreten

## 8.6 Fazit

Mit den Ergebnissen der ermittelten Verschiebungen und Verkipnungen wird der Zusammenhang zwischen Verkipfung und Wirkungsgrad aufgezeigt. Mit den Betriebsparametern Drehzahl, Förderdruck, Temperatur und axialem Spaltmaß werden über die Messungen aufgezeigt, dass eine Abhängigkeit zwischen Verkipfung des Hohlrads und dem Wirkungsgrad besteht. Bei einem geringeren axialen Spaltmaß und hohen Viskositäten lässt sich kaum eine Verkipfung erkennen. Eine Kompensationstasche wäre nicht nötig. Der Wirkungsgrad wird vermindert, so dass die Kompensationsmaßnahmen keine Wirkung zeigen. Bei einer höheren Temperatur und somit geringerer Ölviskosität jedoch verhilft eine Kompensationstasche zu besseren Wirkungsgraden und zum Ausgleich der Verkipfung. Derselbe Effekt tritt bei Druckänderung ein. Die Kompensationstasche im Deckel vermindert die Schiefstellung des Hohlrads. Unter einer Winkelbeschleunigung des Hohlrads sind keine wesentlichen

Verbesserungen der Verkippung mit einem Kompensationsausgleichs erkennbar. Für das größer gewählte axiale Spaltmaß lassen sich Verkippungen über den gesamten Temperaturbereich erkennen. Hierbei stellt sich heraus, dass mit steigender Temperatur und steigendem Förderdruck die Verkippung zunimmt. Der Wirkungsgrad ist zusammenfassend geringer als bei einem kleineren axialen Spalt. Eine Kompensationstasche bewirkt hierbei zwar eine Verminderung der Verkippung des Hohlrads, jedoch ergeben sich durch den vergrößerten axialen Spalt erhöhte Leckströme. Eine Wahl von größeren Spaltmaßen ist nach den gemessenen Ergebnissen nicht sinnvoll. Somit sollten axiale Spaltmaße im Bereich von 0,030 - 0,045 mm vorgesehen werden, um Wirkungsgradeinbußen zu vermeiden.

Um dem Konstrukteur von hohlradgetriebenen IZP's die Erkenntnisse der Spaltmessungen für die Auslegung bereitzustellen, sind die Ergebnisse in einem Muscheldiagramm zusammengefasst (Bild 8.21). Dieses wird so dargestellt, dass auf der Abszisse alle resultierenden Hohlradkräfte vektoriell addiert aus radialen und axialen Kräften aufgetragen werden. Auf der Ordinate sind die gemessenen Verkippungen abgetragen. Dazu werden als Muschelfelder die erhaltenen Wirkungsgrade mit eingebracht. Somit erhält der Anwender aus der Eingabe der Grunddaten die resultierende Kraft und kann je nach ausgegebenem Wirkungsgrad und Verkippung festlegen, ob eine Kompensationstasche nötig ist oder nicht. Die Werte in Bild 8.21 beschränken sich dabei auf die Erkenntnisse der Pumpen mit Hohlrad 2a, mit dem man axiale Spaltmaße von 0,045 mm erreicht.



**Bild 8.21:** Muscheldiagramm zur Visualisierung der relativen Verkippung über der resultierenden Kraft in Abhängigkeit vom resultierenden volumetrischen Wirkungsgrad



## 9 Auslegungsmodell für hohlradgetriebene Innenzahnradpumpen

Die Teilergebnisse und Erkenntnisse der vorangegangenen Kapitel 6 - 8 zeigen Berechnungsverfahren und Messreihen auf, mit denen quetschölfreie Pumpenverzahnungen, Sichel, Stege und die Druckübergaben in Verbindung mit den nötigen Spaltmaßen bestimmt werden können. Diese Verfahren sollen so aufbereitet werden, dass es dem Konstrukteur bereits in der methodischen Auslegungsphase durch Vorgabedaten möglich ist, eine Gesamtauslegung durchzuführen. Mit Hilfe einer Auslegungsmethode, die über Unterprogramme inhaltlich nutzbar wird, werden die Algorithmen und Berechnungsschritte der Kapitel 6 - 8 verarbeitet (Bild 9.1).

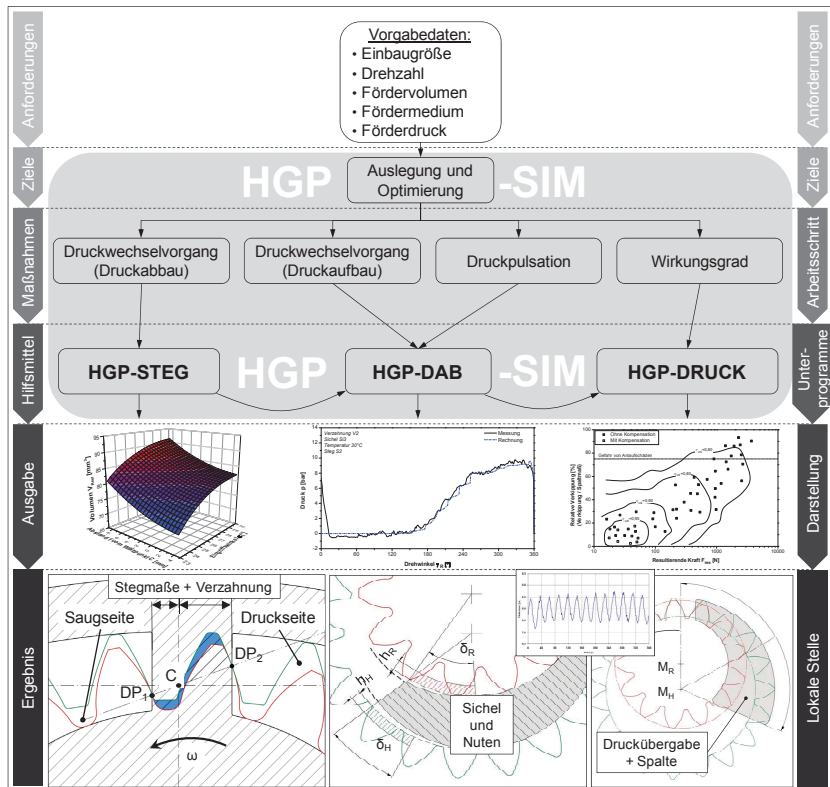


Bild 9.1: Auslegungsmodell für hohlradgetriebene Innenzahnradpumpen

In Bild 9.1 wird in der linken und rechten Spalte der ideelle Ablauf der Auslegungsmethode von den Anforderungen bis zu den Ergebnissen gegliedert. In der mittleren Spalte können die Strukturbausteine des HGP-SIM Auslegungsprogramms mit Unterprogrammen in den Arbeitsschritten an der Verzahnung und am Steg (HGP-STEG), in der Druckaufbauzone (HGP-DAB) und an der Druckübergabe (HGP-DRUCK) abgelesen werden. In dieser Spalte werden symbolisch die Ergebnisdarstellung und die lokale Stelle zu den Berechnungsthemen der Kapitel 6 - 8 eingeblendet.

HGP-SIM wird in Verbindung mit einem Verzahnungsauslegungsprogramm als alleinstehendes Programm gestartet. Danach werden die Vorgabedaten für die Einbaugröße, die Drehzahl, das Fördervolumen, das Fördermedium und des Förderdrucks in die Eingabe und das Hauptprogramm HGP-SIM (HGP = Hohlradgetriebene Innenzahnradpumpe) geladen. Die Vorgabedaten werden dort in tabellarischer Form in den dafür vorgesehenen Platzhaltern eingefügt. Werte, die außerhalb der Definitionsbereiche liegen, werden als Fehlermeldung ausgegeben.

Mit dem Druckabbauvorgang wird als erster Teilbereich im Unterprogramm HGP-STEG begonnen, weil dieser sich direkt auf die Verzahnungsgestaltung auswirkt und somit die anderen Bereiche beeinflusst. In HGP-STEG werden über iterative Schleifen die Verzahnungsparameter nach der Priorisierung aus Bild 6.16 bestimmt, um dem Anwender die quetschölfreie Pumpenverzahnungsform und die dafür ausgelegten Stegmaße auszugeben. Mit diesen Verzahnungsdaten erfolgen die weiteren Berechnungen und Auslegungen.

Die Verzahnungsdaten werden an das nächste Unterprogramm HGP-DAB weitergegeben. Mit einer möglichst lang ausgelegten Sichel wird mit Hilfe der zuvor bestimmten Verzahnungsdaten der Druckverlauf in der Zahnkammer berechnet. Aus diesen Ergebnissen werden Rückschlüsse gezogen, ob die Sichelänge verändert werden muss oder ob Nutungen an der Sichel für den Druckaufbauvorgang hinzugefügt werden, so dass die maximal zur Verfügung stehende Länge des Druckaufbaubereichs genutzt wird. Diese Maßnahme wirkt sich zusätzlich mindernd auf die Druckpulsationen am Pumpenausgang aus.

Im letzten Programmtteil HGP-DRUCK wird über die Vorgabedaten die resultierende Kraft aus Druck- und Antriebskraft am Hohlrad berechnet. Nach den Erkenntnissen aus Kapitel 8 werden die erforderlichen axialen Spaltmaße empfohlen. Zudem wird aus den erhaltenen Erkenntnissen die Anbringung einer Kompensationstasche über ein Muscheldiagramm ersichtlich. Die Angaben ermöglichen eine minimale Verkipfung des Hohlrads, um mit hohem Wirkungsgrad arbeiten zu können.

Mit den Einzelergebnissen aus den drei Unterprogrammen ist die geometrische Gestaltung der Pumpe vollständig definiert. Neben der Verzahnung und des Stegs werden die Lage und die Größe der Sichel mit Nuten, die Lage und die Größe der Drucktasche und die erforderlichen axialen Spaltmaße ausgegeben.

Nachfolgend wird ein konkretes Berechnungsbeispiel anhand der in Bild 9.1 dargestellten Übersicht aufgezeigt.

### Vorgabedaten an die Zahnradpumpe:

- Drehzahl  $n = 750 \text{ min}^{-1}$ ; Fördervolumen  $Q = 40 \text{ l} \cdot \text{min}^{-1}$
- Verzahnungsbreite  $b_{\max} = 20 \text{ mm}$
- Förderdruck  $p_D = 8 \text{ bar}$
- Kinematische Viskosität des Fördermediums  $\nu_{OI} = 8 \dots 50 \text{ mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$



📁 **Start HGP-SIM:** Eingabe aller Vorgabedaten durch den Benutzer

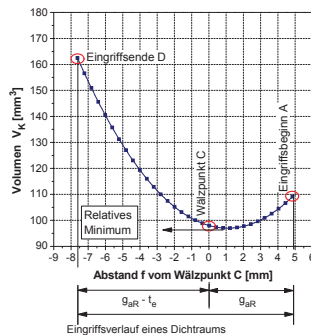


📁 **Start Unterprogramm HGP-STEG:**

- Vorauslegung der Verzahnung V1 anhand der Vorgabedaten mit Hilfe eines Zahnradauslegungsprogramms (vgl. Vorgehen nach Kapitel 6.5)
- Berechnung des Eingriffsvolumens

Verzahnung V1:

- $Z_R = 13$
- $m = 5 \text{ mm}$
- $a = 15,13 \text{ mm}$
- $x_H = -0,49$
- $h_{aR} = 0,687$

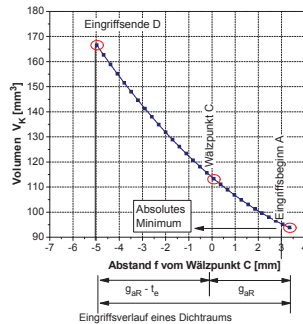


→ **Ausgabe:** Das Volumen im Zahneingriff ist nicht quetschölfrei!

- Eine Optimierung der Verzahnung ist mit HGP-STEG anhand der Variation der Verzahnungsparameter mittels einer Schleifenfunktion  $\cup$  erforderlich  
Daraus wird Verzahnung V2 ausgegeben

Verzahnung V2:

- $Z_R = 15$
- $m = 5 \text{ mm}$
- $a = 10,75 \text{ mm}$
- $x_H = -0,29$
- $h_{aR} = 0,365$

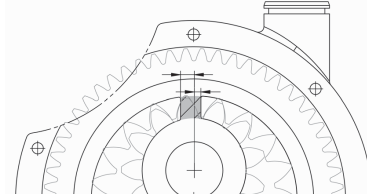


→ **Ausgabe:** Das Volumen im Zahneingriff ist quetschölfrei!

- Berechnung der erforderlichen Stegmaße für die Verzahnung V2

### Ergebnis aus HGP-STEG:

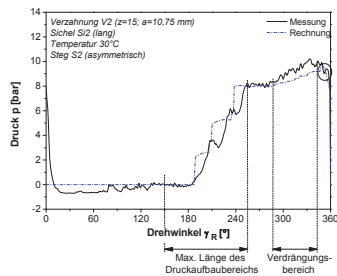
- Quetschloptimierte Verzahnung
- Auf Verzahnung abgestimmter Steg



### Start Unterprogramm HGP-DAB:

- Die Daten der Verzahnung V2 werden aus HGP-STEG übergeben
- Aus diesen Verzahnungsdaten und der Wahl einer möglichst konstruktiv lang gestalteten Sichel Si2 wird der Druckverlauf in der Zahnkammer berechnet

Sichel Si2

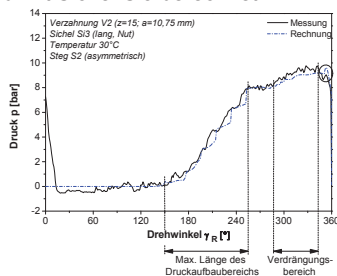


→ Ausgabe: Der Druckaufbaubereich wird nicht in der vollen Länge genutzt!

- Eine Optimierung der Sichelgeometrie ist mit HGP-DAB anhand der Variation der Nuten in der Sichel mittels einer Schleifenfunktion  $\cup$  erforderlich. Daraus wird eine neue Sichel Si3 mit Einlaufnuten ausgegeben
- Der Druckverlauf in der Zahnkammer wird mit Sichel Si3 berechnet

Sichel Si3

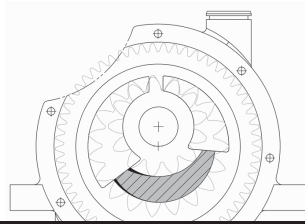
- Einlaufnuten mit  $h_{KE} = 0,85$  mm, tangentialer Übergang bei  $\varphi_{KE} = 47^\circ$



→ Ausgabe: Der Druckaufbaubereich entspricht der Sichelänge!

### Ergebnis aus HGP-DAB:

Sichel mit Nutungen



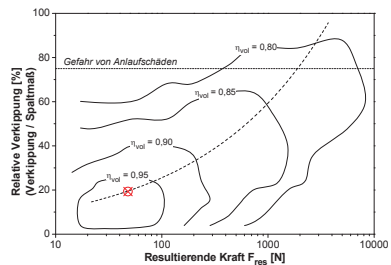
### Start Unterprogramm HGP-DRUCK:

- Die Daten aus HGP-DAB werden übernommen
- Die Wahl eines axialen Spaltmaßes ist erforderlich (Empfehlung ist 0,035 – 0,045 mm)
- Die Wahl der Größe des Antriebswinkels  $\varepsilon_{AD}$  ist erforderlich
- Aus den Daten wird die resultierende Kraft am Hohlrad und die Verkipfung berechnet

Resultierende Kraft  $F_{res}$  am Hohlrad

$$F_{res} = 48 \text{ N}$$

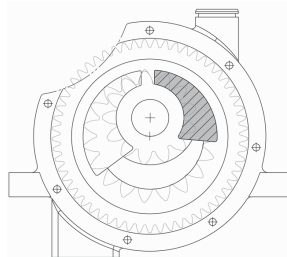
$$\eta_{vol} \geq 0,95$$



- Ausgabe:
- Es ist keine Kompensationstasche erforderlich!
  - Keine Korrektur des Antriebswinkels  $\varepsilon_{AD}$  nötig!
  - Drucktasche ist ausreichend groß gewählt!

### Ergebnis aus HGP-DRUCK:

Empfehlung über die Auslegung der Druckseite  
Empfehlung zur Anbringung einer Drucktasche



**ENDERGEBNIS: Optimierte Auslegung der Pumpe !!!**



## 10 Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Optimierung der Auslegung und des Betriebsverhaltens von hohlradgetriebenen Innenzahnrادpumpen unter dem Aspekt niedrige Geräuschemissionen, niedrige Herstellungskosten und die wirtschaftliche Umsetzbarkeit zu realisieren.

Zahnrادpumpen werden überwiegend als Verdrängereinheiten beim Einsatz in hydraulischen Anlagen eingesetzt. Dabei sind aufgrund der geringeren Herstellungskosten Außenzahnrادpumpen weiter verbreitet als Innenzahnrادpumpen, obwohl diese wesentlich höhere Geräuschemissionen bei gleicher Leistung aufweisen. Möchte man Konzept-, Auslegungs-, und Dimensionierungsregeln für Innenzahnrادpumpen erstellen, macht dies nur Sinn, wenn deren Kostenniveau auf Außenzahnrادpumpen gleicher Leistung gesenkt werden kann. Aus diesem Grund werden in der vorliegenden Arbeit hohlradgetriebene Innenzahnrادpumpen untersucht, da wertanalytische Betrachtungen und Untersuchungen ein ähnliches Kostenniveau wie bei Außenzahnrادpumpen und niedrigere Geräuschemissionen bei gleicher Leistung ergeben. Die Antriebsart dieser Pumpen unterscheidet sich zu konventionellen, ritzelgetriebenen Innenzahnrادpumpen dahingehend, dass über eine Öffnung im Gehäuse die am Hohlrad integrierte Stirnradverzahnung aus der Pumpe ragt und als Antriebsrad dient. Dadurch entfallen Bauteile wie die Antriebswelle und das Antriebsritzel. Es kann als weiteres Potenzial ein geringerer axialer Bauraum ausgeführt werden.

Der Stand der Technik weist aus, dass es umfangreiche Untersuchungen zum Betriebsverhalten, wie den Geräuschursachen und Druckwechselvorgängen, an Außenzahnrادpumpen und nur sehr wenige an Innenzahnrادpumpen gibt. Bezüglich der Geräuschursache stellt sich heraus, dass in beiden Zahnrادpumpensystemen die hydraulischen Geräusche gegenüber den mechanischen Geräuschen überwiegen. Hydraulische Geräusche finden ihre Ursache vornehmlich durch die aus der geometrischen Verdrängung erzeugten Volumenstrompulsationen, daraus resultierenden Druckpulsationen am Pumpenausgang und deren Weiterleitung in die Druckleitungen der Anlage. Des Weiteren wirken sich Druckwechselkräfte in Druckwechselvorgängen, wie sie beispielsweise beim Umsteuervorgang zwischen der Hochdruck- und der Niederdruckseite entstehen, direkt auf das Pumpeneigengeräusch aus. Die aus den Literaturrecherchen getroffenen Maßnahmen zur Verringerung von Druckwechselkräften, wie z.B. die Steggestaltung zur Verminderung des Druckgradienten von der Hochdruck- zur Niederdruckseite, werden aus den Erkenntnissen von Außenzahnrادpumpen auf Innenzahnrادpumpen vorschnell übertragen. Verifikationen dazu sind jedoch nur unzureichend oder nicht vorhanden. Für Innenzahnrادpumpen sind somit keine allgemein gültigen Auslegungsregeln bekannt. Daher ist das Ziel dieser Arbeit Regeln für Innenzahnrادpumpen, die sich durch kleine Druckwechselkräfte, geringe Druckpulsationen und hohe Wirkungsgrade auszeichnen, zu erstellen. Druckpulsationen und Druckwechselkräfte verursachen hauptsächlich

Geräuschemissionen, hohe Kräfte und einen niedrigen Wirkungsgrad der Pumpe. Entgegenwirken kann man diesem Phänomen aktiv durch einen neuen Ansatz zur Verzahnungsauslegung und neue Gestaltungsregeln der Geometrieparameter der Pumpe. Des Weiteren sind durch das alternative Antriebskonzept aufgrund der exzentrischen Krafteinleitung eventuelle Verkippungen der Pumpenräder auf die Auswirkungen des Betriebsverhaltens zu untersuchen. Die Verkippung kann zu Spaltänderungen und damit zu Wirkungsgradverlusten oder Bauteilverschleiß führen und deswegen soll diese möglichst minimiert werden. Die erarbeiteten Auslegungsregeln sind über Versuche zu verifizieren und in einem Expertensystem für den Anwender alltagstauglich bereitzustellen.

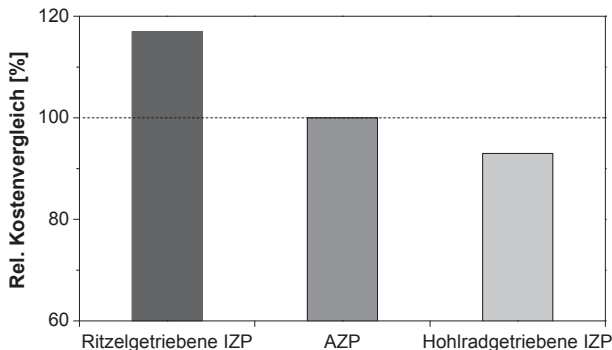
Das methodische Vorgehen zur Erstellung der Auslegungsregeln wird über eine separate Ausarbeitung der einzelnen Druckbereiche (Druckabbau-, Druckaufbau-, Verdrängungs- und Förderdruckbereich) in der Pumpe erreicht. Für den Druckabbaubereich, der den Druckwechselvorgang von Hochdruck- zu Niederdruckseite im Zahneingriffsbereich beschreibt, wird ein geometrisches Verfahren zur Auslegung der Verzahnungsgeometrie entwickelt. Durch dieses ist es möglich das Eingriffs-volumen der Verzahnung so zu dimensionieren, dass beim Fördervorgang minimale Drucküberhöhungen in der Zahnkammer entstehen. Weiterhin kann aus diesem Verfahren die optimale Lage des Stegs, die Trennkante zwischen der Hochdruck- und der Niederdruckseite, ermittelt werden. Zur Minderung von Druckwechselkräften im Druckaufbaubereich ist es notwendig einen kontinuierlich ansteigenden Druckaufbau zu erreichen. Das bedeutet, dass der Druckaufbauvorgang ohne große Druckstöße und mit niedrigen Druckgradienten verläuft. Dies kann nur durch gezielte zusätzliche Leckagen im Druckaufbaubereich, die über Nuten in der Sichel realisiert werden, erfolgen. Um die Größe, Position und Auswirkungen der Nuten berechnen zu können, wird ein analytisches Modell für den Druckverlauf in der Zahnkammer in Analogie zur Elektrotechnik entwickelt. Dadurch lassen sich die von Massenströmen und hydraulischen Widerständen abhängigen Drücke über das Knotenpotentialverfahren ermitteln. Für den Verdrängungsbereich und den Eingriffsbereich werden Widerstände mit induktivem Charakter eingesetzt, die die Trägheit des Mediums in Strömungsvorgängen berücksichtigt. Zusätzlich zu den Druckvorgängen wird bei der Auslegung durch den exzentrischen Antrieb der hohlradgetriebenen Innenzahnradpumpe und die einseitige Druckübergabe an der Drucktasche die Verkippung des Hohlrads berücksichtigt. Die Untersuchungen der Spaltmessungen über Wirbelstromsensoren geben Aufschluss darüber, wie sich die Betriebsparameter auf die Verkippung in Abhängigkeit des Wirkungsgrads auswirken. Darüber hinaus werden Aussagen zur Spaltänderung und Verkippung über dynamische Effekte bei Drehzahländerung und bei Druckänderung gemacht. Zur Kompensation der Verkippungen kann in den Deckel eine Kompensationstasche eingebracht werden.

Die dargestellte Reihenfolge wird als methodische Vorgehensweise in einem Programm (HGP-SIM) umgesetzt. Dieses Programm gibt anhand von Anforderungen an



die Pumpe die Berechnungshilfen und Ergebnisse zur Gestaltung der einzelnen Auslegungsbereiche aus. Das entwickelte Konzept zur Auslegung von hohlradgetriebenen Innenzahnradpumpen wird an eigens für diese Arbeit hergestellten Versuchspumpen verifiziert. Dazu werden unterschiedliche Stege (S1 – S3), Verzahnungen (V1 und V2) und Sichel (Si1 – Si3) zur Untersuchung der Einflüsse der einzelnen behandelten Teilbereiche auf das Betriebsverhalten der Pumpe gefertigt. Zur messtechnischen Erfassung von Druckvorgängen im Inneren der Pumpe ist es nötig, den Druckverlauf in einer Zahnkammer während einer Umdrehung zu ermitteln. Diese Messung erfolgt mit einem im Zahnfuß verbauten Miniaturdrucksensor, der den Druck in einer Zahnücke während einer Umdrehung aufzeichnet. Für die neue Ausführung des Stegs (S2) in Verbindung mit der neu ausgelegten Verzahnung (V2) stellt sich eine Minderung des Quetschöldrucks von bis zu 56% im Vergleich zu den nach dem Stand der Technik ausgelegten Steg (S1) und Verzahnung (V1) dar. An der Pumpe mit beiden optimierten Variationsmerkmalen wird eine über der Drehzahl kontinuierliche Schallpegelmessung durchgeführt. Diese zeigt eine durchschnittliche Senkung um 8,5 dB(A). Der Wirkungsgrad wird von dieser Steg- und Verzahnungsgestaltung kaum beeinflusst. Dieser Effekt ist auf den Betrieb der Pumpen im Niederdruckbereich zurückzuführen. Die Verifizierung der Auslegung der Sichel zeigt, dass eine längere Sichel deutliche Vorteile gegenüber einer kürzeren bietet. Die lange Sichel (Si2) führt zu einem lang gestreckten Druckaufbaubereich der Pumpe und reduziert die Druckpulsationen am Förderdruckausgang der Pumpe. Bei der lang gestreckten Sichel mit den voraus berechneten Nutungen (Si3) sind die Pulsationen bis auf die Hälfte absenkbar. Hinsichtlich der Minimierung der Verkippung wird nachgewiesen, inwiefern der Einsatz einer Kompensationstasche sinnvoll ist. Der Wirkungsgradgewinn durch die Verringerung der Verkippung wird dabei dem Wirkungsgradverlust durch die axiale Spaltzunahme gegenübergestellt. Aus den Erkenntnissen wird ein Kennfeld zur Auslegung einer Kompensationstasche erarbeitet.

Die Verifikation der durchgeführten Maßnahmen zur methodischen Auslegung und Verbesserung des Betriebsverhaltens von hohlradgetriebenen Innenzahnradpumpen zeigt auf, dass das entwickelte Programm ein geeignetes Tool für den Anwender in der Auslegungsphase ist. Mit dem konstruktiv neuen Grundgedanken für hohlradgetriebene Innenzahnradpumpen ist es möglich das Kostenniveau von Außenzahnradpumpen zu erreichen oder sogar zu unterschreiten (Bild 10.1).



**Bild 10.1:** Relativer Kostenvergleich von verschiedenen Pumpenbauarten [57]

Des Weiteren kann durch das Antriebsprinzip eine Verringerung der Baubreite um bis zu 45% erreicht werden. Die Eigenschaft der Innenzahnradpumpe, die eine geringere Pulsation und folglich reduzierte Geräuschemissionen mit sich bringt, kann mit Hilfe dieser Arbeit kostengünstig umgesetzt werden.

Die Ziele der Arbeit, industriell anwendbare hohlradgetriebene Innenzahnradpumpen zu realisieren, werden unter den aufgeführten Aspekten erreicht.

Für eine flächendeckende Anwendung in der Industrie sollte erörtert werden, mit welchen Anpassungen sich das entwickelte Auslegungskonzept der hohlradgetriebenen Innenzahnradpumpen auf den Mittel- und Hochdruckbereich anwenden lässt. In diesem Rahmen stellen sich neue Herausforderungen zur Untersuchung der Wirkungsgrade in Abhängigkeit von ausgeführten Spaltmaßen. Die Auswirkungen höherer Förderdrücke beeinflussen die Verkipfung der Pumpenräder, die Druckgradienten und die Druckpulsationen. Somit sind auch die entwickelten Ansätze der elektrisch-hydraulischen Analogie zur Ermittlung der Druckverläufe auf ihre Genauigkeit hin zu verfeinern, um Abweichungen, die im Niederdruckbereich keinen Einfluss haben, berücksichtigen zu können. Es ist zu prüfen, ob die Nutungen, die im Berechnungssystem für die Auslegung der Sichel vorgesehen werden, übertragbar sind. Es wird aufgezeigt, dass die Druckverläufe in Pumpen den entscheidenden Einfluss für deren Betriebsverhalten, Wirkungsgrad und die Geräuschemissionen haben. Gerade für die Geräuschemissionen sollen Untersuchungen anschließen, die eine Priorisierung der verschiedenen Einflüsse, wie Druckgradienten, Verkipnungen oder Druckpulsationen qualitativ und quantitativ bewerten. Somit könnte eine Aussage darüber getroffen werden, welcher Teilbereich die Geräuschemissionen aktiv beeinflusst und welche Überlagerungen der einzelnen Teilbereiche eine Verstärkung oder gar eine Dämpfung bewirken. Eine weitere Geräuschursache in Pumpen ist die Kavitation. Dieses im Ansaugbereich auftretende Phänomen der Hohlraumbildung im Medium kann bei den untersuchten Pumpen nicht festgestellt werden. Für Einsatzgebiete mit stark

verschäumten Fördermedien oder für andere Baugrößen wäre es jedoch wünschenswert, Untersuchungen in dieser Richtung anzustellen und das Auslegungsmodell für den Ansaugbereich zu erweitern.

Die Einsparung von Bauteilen und die damit verbundene geringere axiale Baubreite ist ein Potenzial von hohlradgetriebenen Innenzahnradpumpen. Hierzu wäre es sinnvoll Studien anzustellen, die unter Berücksichtigung von radialen und axialen Bauraumgrenzen eine Optimierung der Baugröße in Bezug auf die Leistung vornehmen.

Zum betriebssicheren Einsatz in der Industrie ist es ein Anliegen das Auslegungsprogramm HGP-SIM als solitäres, installierbares und bedienerfreundliches Front-End-Programm zu vervollständigen. Zudem wird eine grafisch unterstützte Oberfläche dem Anwender die strikte Durchführung der Algorithmen erleichtern.



## 11 Literatur

- [1] Findeisen, D. Methodisches Auswählen bewährter Lösungskomponenten - Anwendungsbeispiel: Verdrängereinheiten für hydrostatische Antriebe, Konstruktion, 1995, Nr. 47, S. 79-85
- [2] Fahrzeuggeräuschmessung, Skript RWTH Aachen, 2006
- [3] Fiebig W. Schwingungs- und Geräuschverhalten der Verdrängerpumpen und hydraulischen Systeme, Habilitation Universität Stuttgart, 2000
- [4] Molly, H. Die Zahnradpumpe mit evolventischen Zähnen, Ölhdraulik und Pneumatik, 1958, Nr. 1, S. 24-26
- [5] Gutbrod, W. Die Druckpulsation von Außen- und Innenzahnradpumpen und deren Auswirkungen auf das Pumpengeräusch, Dissertation Universität Stuttgart, 1974
- [6] Gösele, R. Volumenstromschwankungen hydrostatischer Pumpen, Ölhdraulik und Pneumatik 23, 1979, Nr.5, S. 371-376
- [7] Link, B.  
Wang, Y. Förderstrom- und Druckpulsation von Zahnrad- und Kolbenpumpen, Konstruktion, 1983, Nr. 12, S. 465-471
- [8] Morlok, J. Geräuschminderung bei Hochdruckkonstantpumpen, Dissertation Universität Stuttgart, 1980
- [9] Link, B. Förderstrompulsation von Außenzahnradpumpen, O + P, 1986
- [10] Link, B. Untersuchung der Förderstrom- und Druckpulsation von spaltkompensierten Außenzahnradpumpen, Fortschrittsberichte VDI Reihe 1, 1986, Nr. 137
- [11] Seltenheim, V. Kammerbildung und Füllgrenze von Außenzahnradpumpen, Dissertation Universität Dortmund, 1984
- [12] Schwuchow, D. Sonderverzahnungen für Zahnradpumpen mit minimaler Volumenpulsation, Dissertation Universität Stuttgart, 1996
- [13] Hagen, K. Volumenverhältnisse, Wirkungsgrade und Druckschwankungen in Zahnradpumpen, Dissertation Universität Stuttgart, 1958
- [14] Richter, H. Theoretische Förderstrom- und Quetschraumuntersuchungen an Zahnradpumpen, Technischer Informationsdienst Hydraulik, 1962, Nr. 2, S. 48-53

- 
- [15] Fiebig, W. Location of Noise Sources in Fluid Power Machines, International Journal of Occupational Safety and Ergonomics (JOSE) 2007, Vol. 13, No. 4, S. 441-450
- [16] Gösele, R. Zur Entstehung und Berechnung des Geräusches von hydrostatischen Pumpen, Dissertation Universität Stuttgart, 1979
- [17] Hübsch, H.-G. Untersuchung des Geräuschverhaltens und konstruktive Möglichkeiten zur Geräuschminderung an nicht druckkompensierten Zahnradpumpen, Dissertation Universität Stuttgart, 1969
- [18] Fricke H.-J. Neue Wege der Geräuschsenkung bei Außenzahnradpumpen, Ölhydraulik und Pneumatik 21, 1977, Nr.10, S. 709-711
- [19] Fiebig W. Schwingungen und dynamische Belastungen in Außenzahnradpumpen, Ölhydraulik und Pneumatik 34, 1990, Nr. 11, S. 775-784
- [20] Fiebig W. Hydraulisch bedingte Wechselkräfte in Außen- und Innenzahnradpumpen und deren Vergleich, Ölhydraulik und Pneumatik 41, 1997, Nr. 11-12, S. 809-813
- [21] Fiebig, W.,  
Lang C.M. Berechnung der Druckpulsation von Außenzahnradpumpen, Ölhydraulik und Pneumatik 34, 1990, Nr. 4, S. 262-267
- [22] Grbovic, V. Förderstromschwankungen einer Zahnradpumpe, Dissertation Universität Zürich, 1983
- [23] Willekens F.A. Instantes Fördervolumen, geometrisches Hubvolumen und Ungleichförmigkeitsgrad von Zahnradpumpen, Industrie-Anzeiger 93, 1971, Nr. 26, S. 549-554
- [24] Riedl, K. Pulsationsgerechte Außenzahnradpumpen mit ungleichförmig übersetzten Radpaaren, Dissertation Universität Stuttgart, 1996
- [25] Becher, D.,  
Rausch, F. Zweiflankendichtung mindert Volumenstrompulsation an Außenzahnradpumpen, Ölhydraulik und Pneumatik 41, 1997, Nr. 2, S. 96-100
- [26] Braun, U. Optimierung von Außenzahnradpumpen mit pulsationsarmer Sonderverzahnung, Dissertation Universität Stuttgart, 2000
- [27] Kollek, K.,  
Stryczek, J. Optimierung der Parameter von Zahnradpumpen mit Evolventenverzahnung, Ölhydraulik und Pneumatik 22, 1978, Nr. 4, S. 208-212

- 
- [28] Heisel, U., Rothmund, J., Fiebig, W. Formfrage - Einfluss der Zahnkopfrücknahme auf die Geräuschemissionen beim Betrieb von Außenzahnradpumpen, Maschinenmarkt 96, 1990, Nr. 38, S. 262-268
- [29] Müller, H.W. Geräusche an Verdrängermaschinen, VDI-Berichte 228, 1975, S. 145-155
- [30] Eaton, M., Keogh P.S., Edge K.A. The modelling, prediction and experimental evaluation of gear pump meshing pressures with particular reference to aero-engine fuel pumps, 2006, Proc. IMechE, Vol. 220, Part I, S. 365-379
- [31] Wustmann W. Experimentelle und numerische Untersuchung der Strömungsvorgänge in hydrostatischen Verdrängereinheiten am Beispiel von Außenzahnrad- und Axialkolbenpumpe, Dissertation Universität Dresden, 2009
- [32] Casoli P., Vacca A., Franzoni G. A numerical model for the simulation of external gear pumps, 6th JFPS International Symposium on Fluid Power Tsukuba, 2005, S. 705-710
- [33] Casoli P., Vacca A., Berta G.L. Optimization of relevant design parameters of external gear pumps, 7th JFPS International Symposium on Fluid Power, Toyama, 2008, S. 277-282
- [34] Manring, N.D., Kasaragadda, S.B. The theoretical flow ripple of an external gear pump, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Vol. 125, 2003, S. 396-404
- [35] Mucchi E., Dalpiaz G., Fernandez del Rincon A. Elastodynamic analysis of a gear pump. Part I: Pressure distribution and gear eccentricity, Mechanical Systems and Signal Processing 24, 2010, S. 2160–2179
- [36] Mucchi E., Dalpiaz G., Rivola A. Elastodynamic analysis of a gear pump. Part II: Meshing phenomena and simulation results, Mechanical Systems and Signal Processing 24, 2010, S. 2180–2197
- [37] Europäische Patentschrift EP1997005631, 1997  
Innenzahnradpumpe mit Antrieb über das Hohlrad
- [38] Norm: DIN 45 635 Teil 26, Geräuschemessung an Maschinen, Hydropumpen
- [39] Norm: ISO 4412 Teil 1, Prüfverfahren zur Ermittlung des Luftschalls, Hydropumpen
- [40] Norm: DIN 45 635 Teil 41, Geräuschemessung an Hydraulikaggregaten

- 
- [41] Fiebig, W.,  
Heisel U. Ein neuer Weg zur Geräuschminderung von hydraulischen Systemen, Ölhydraulik und Pneumatik 40, 1996, Nr. 3, S. 178-183
- [42] Findeisen, D. Ölhydraulik,  
Springer Verlag, Berlin, 2006
- [43] Vetter, G. Rotierende Verdrängerpumpen für die Prozesstechnik,  
Vulkan Verlag, Essen, 2006
- [44] Will, D.,  
Gebhardt N. Hydraulik,  
Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2008
- [45] Strasser, D. Einfluss des Zahnflanken- und Zahnkopfspieles auf die Leerlaufverlustleistung von Zahnradgetrieben,  
Dissertation Universität Bochum, 2006
- [46] Tuckenbrodt, E. Fluidmechanik, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2008
- [47] Bantel, M. Messgeräte-Praxis - Funktion und Einsatz moderner Messgeräte, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2004
- [48] Linke, H. Stirnradverzahnung,  
Carl Hanser Verlag München Wien, 2010
- [49] Norm: DIN 780 Teil 1, Modulreihe für Zahnräder
- [50] Ivantysyn, J.,  
Ivantysyn, M. Hydrostatische Pumpen und Motoren,  
Vogel Verlag Würzburg, 1993
- [51] Körner, T. Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu hydrostatisch selbstsperrenden Stirnradifferentialen,  
Dissertation, Universität Stuttgart, 1987
- [52] Müller, G.  
Möser, M. Taschenbuch der Technischen Akustik  
Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2004
- [53] Heisel, U.  
Rothmund, J. Verfahren zur Messung der Druckpulsation von Verdrängerpumpen, Fluidtechnik 1, 1989, S. 45-49
- [54] Marinescu, M.,  
Winter, J. Grundlagenwissen Elektrotechnik,  
Vieweg und Teubner Verlag Wiesbaden, 2011
- [55] Micro-Epsilon GmbH Bedienungsanleitung eddy NCDT 3300 – berührungslose Wegsensoren, 2012
- [56] Shell Oil GmbH Datenblatt Shell Tegula V 32, 2009
- [57] Wertanalyse Voith Turbo GmbH, Bericht, 2009



## Anhang

### A1 - Ergänzungen zu Kapitel 5

#### A1.1 Funktionsweise und Schaltplan Prüfstand UZP

Bild A1.1 zeigt den hydraulischen Schaltplan des universellen Zahnradprüfstands. Die Pumpe 1 fördert das Öl je nach Füllstandshöhe vom Haupttank in den Nebentank oder vom Nebentank in den Haupttank. Über die Pumpe 2 wird das Öl über den Filter 3 je nach gemessener Temperatur am Temperatursensor 4 über den Kugelhahn 5 entweder durch den Durchlauferhitzer 6, die Wasserkühlung 7.1 oder die Luftkühlung 7.2 geführt. Mit der Füllpumpe 8 wird das auf die Soll-Temperatur aufbereitete Öl über den Filter 9 in die Prüfbox gepumpt. Die Füllstandshöhe wird über den Drucksensor 10 und die Temperatur wird über den Temperatursensor 11 überwacht. Bei einer Anpassung der beiden Messwerte wird entweder über die Füllpumpe 8 die Prüfbox gefüllt oder über die Entleerungspumpe 12 das Öl aus der Prüfbox abgesaugt.

Für den Antrieb stehen der Motor<sub>1</sub> 13.1 oder der Motor<sub>2</sub> 13.2 mit den entsprechenden Drehmomentmesswellen 14.1 oder 14.2 zur Verfügung. Die Prüfpumpen können somit an einen der beiden Antriebsmotoren an die Stelle 15.1 oder 15.2 platziert werden. Je nach den Anforderungen und Durchflussmengen wird Prüfstrang<sub>1</sub> oder Prüfstrang<sub>2</sub> verwendet. Durch die beiden Prüfstränge wird das Öl wieder zurück in den Haupttank gefördert. Die Prüfstränge sind, abgesehen von Ihren Querschnitten, identisch aufgebaut. Über die Drucksensoren 16.1 oder 16.2 wird der Förderdruck der Pumpe am Pumpenausgang erfasst. Die Überdruckventile 17.1 oder 17.2 verhindern im jeweiligen Prüfstrang eine Überlastung der Anlage. Über die Filter 18.1 oder 18.2 erfassen die Volumenstromsensoren 19.1 oder 19.2 die Durchflüsse des jeweiligen Prüfstrangs. Der entsprechende Soll-Förderdruck wird über die Drosselventile 20.1 oder 20.2 eingestellt. Nach Beendigung der Versuche mit der Prüfpumpe wird die Prüfbox über die Entleerungspumpe 12 entleert.

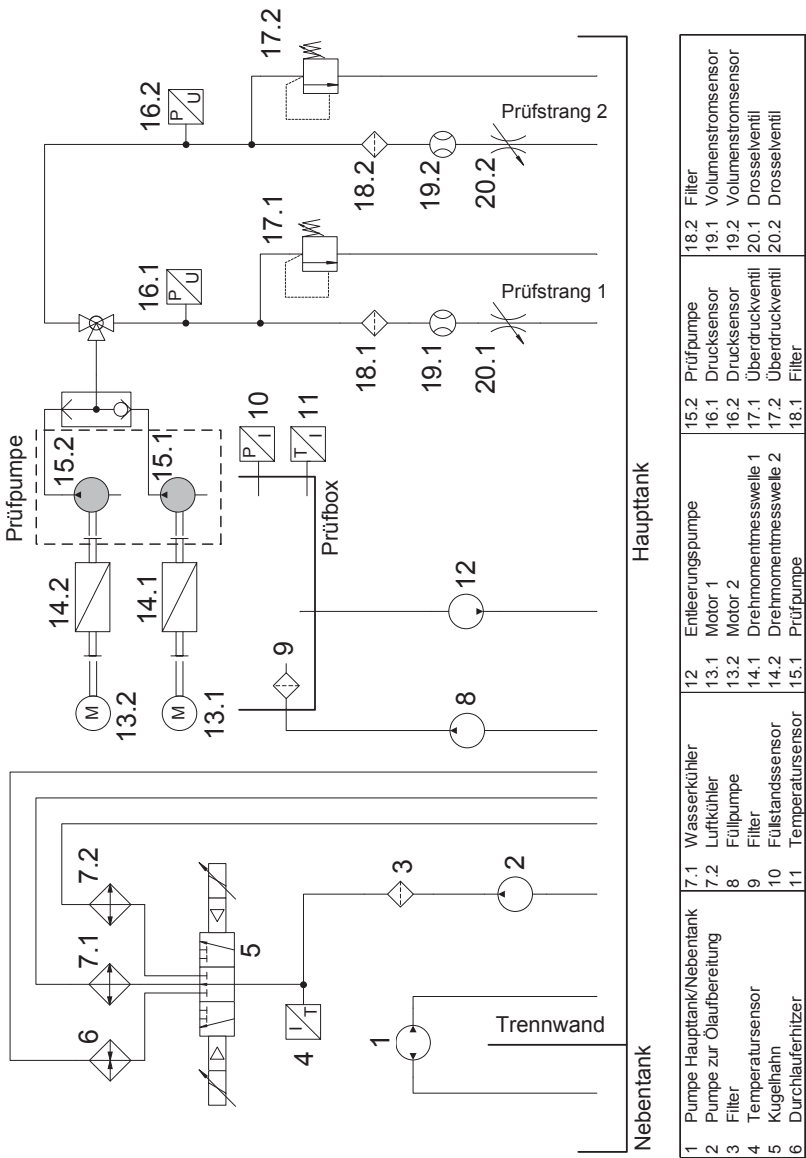


Bild A1.1: Hydraulischer Schaltplan des universalen Zahnradpumpenprüfstands

## A1.2 Messtechnik am Prüfstand UZP

Direkt am Prüfstand sind im jeweiligen Prüfstrang Turbinen-Durchflussmesser für die Volumenstrommessung installiert. Das Ausgangssignal des durch die Strömung drehenden Turbinenrades ist dem Durchfluss direkt proportional. Es kann auf  $\pm 0,5 \text{ l} \cdot \text{min}^{-1}$  genau gemessen werden.

Der Förderdruck wird durch piezoresistive Drucksensoren erfasst. Dabei wird direkt am Pumpenausgang der Druck abgenommen, um eine weitere Veränderung des Messsignals durch Rohrleitungs- oder Filterdruckverluste zu vermeiden. Die Genauigkeit liegt bei  $\pm 0,1 \text{ bar}$ .

Ein PT100-Sensor übernimmt die Temperaturmessung in der Prüfstandsbox als Temperaturfühler. Durch dessen geringe Grenzabweichung deckt er den Messbereich gut ab und löst im Anwendungsbereich zufriedenstellend auf ( $\pm 1 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ).

Die Füllstandshöhe in der Prüfbox wird über einen Drucksensor am tiefsten Punkt der Prüfbox bestimmt. Der statische Druck ändert sich entsprechend der Füllhöhe. Abweichungen durch Dichteunterschiede werden über die Temperaturmessung kompensiert. Der Ölstand kann auf  $\pm 3 \text{ mm}$  genau eingehalten werden.

## A1.3 Öl am Prüfstand UZP

Das am Prüfstand verwendete Öl ist das Shell Tegula V32. Es ist für hydrodynamische Kraftübertragungen geeignet. Die wichtigsten Daten zeigt Tabelle A1.1 als Auszug aus dem Datenblatt.

**Tabelle A1.1:** Charakteristische Daten Shell Tegula V32

<b>Benennung</b>	<b>Einheit</b>	<b>Kennwert</b>
<i>Dichte bei 15°C</i>	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	870
<i>Kinematische Viskosität bei 40°C</i>	$\text{mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	32
<i>Kinematische Viskosität bei 100°C</i>	$\text{mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	5,6
<i>Luftabscheidevermögen bei 50°C</i>	min	2
<i>Pourpoint</i>	$^{\circ}\text{C}$	-33
<i>Flammpunkt</i>	$^{\circ}\text{C}$	211

## A2 - Ergänzungen zu Kapitel 6

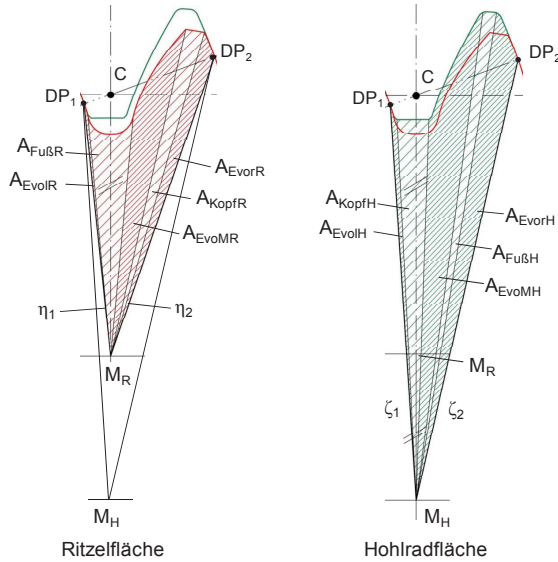
### A2.1 Bestimmung der Restfläche im Eingriff bei Verzahnung mit Flankenspiel

Die folgenden Herleitungen zeigen für eine Verzahnung mit Flankenspiel die Berechnungsgrundlagen zum Erhalt der Restfläche im Eingriff zwischen den Verzahnungen und der Dichtpunkte.

Die Indizes helfen die Flächen und Geometrieparameter der folgenden Gleichungen (A2.1) bis (A2.12) besser zuordnen zu können: Diese beziehen sich auf das Bild A2.1.

Evo	Evolute
Kopf	Kopfkreis
Fuß	Fußkreis
M	mittlere Fläche
l	linke Fläche
r	rechte Fläche
R	Ritzel
H	Hohlrاد

Die Gesamtfläche der Zahnräder zwischen den zwei Dichtpunkten  $DP_1$  und  $DP_2$  entlang der Zahnfuß-, Evolventen- und der Zahnkopfkontur und den Linien  $\eta_1$  und  $\eta_2$  beim Ritzel und  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  beim Hohlrاد lassen sich in fünf Teilflächen aufteilen. Diese Teilflächen setzen sich zusammen aus drei Evolventenflächen, einer Fußkreis- und einer Kopfkreisfläche. Die Fußkreis-, Kopfkreis- und mittlere Evolventenfläche des Ritzels und des Hohlrads sind dabei stets konstant. Die Fläche unter der rechten Berührflanke am Dichtpunkt  $DP_1$  und die unter der linken Berührflanke am Dichtpunkt  $DP_2$  hingegen sind abhängig vom Eingriffsverlauf. Bild A2.1 zeigt schematisch auf, wie sich die Flächen als Gesamtfläche der Zahnräder im Eingriff ergeben. Die Abstände der Dichtpunkte  $DP_1$  und  $DP_2$  vom jeweiligen Mittelpunkt  $M_R$  bzw.  $M_H$ , werden als  $\eta_1$  und  $\eta_2$  beim Ritzel und  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  beim Hohlrاد bezeichnet.



**Bild A2.1:** Hilfsflächen für die Bestimmung des eingeschlossenen Volumens

Mit den Gleichungen (A2.1) und (A2.2) sowie Bild A2.1 kann die Gesamtfläche des Ritzels und des Hohlrads beschrieben werden.

$$A_{\text{Ritzel}} = A_{\text{EvolR}} + A_{\text{FußR}} + A_{\text{EvoMR}} + A_{\text{KopfR}} + A_{\text{EvorR}} \quad (\text{A2.1})$$

$$A_{\text{Hohlrad}} = A_{\text{EvolH}} + A_{\text{KopfH}} + A_{\text{EvoMH}} + A_{\text{FußH}} + A_{\text{EvorH}} \quad (\text{A2.2})$$

Die Flächen können für Ritzel- und Hohlrad wie folgt ermittelt werden:

- Ritzel

$$A_{\text{EvolR}} = \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bR}}^2 \cdot \left( \frac{\eta_1^2}{r_{\text{bR}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A2.3})$$

$$A_{\text{FußR}} = \frac{1}{2} \cdot e_{\text{fFR}}^2 \cdot r_{\text{bR}} - \frac{\pi}{8} \cdot e_{\text{fFR}}^2 \quad (\text{A2.4})$$

$$A_{\text{EvoMR}} = \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bR}}^2 \cdot \left( \frac{r_{\text{aR}}^2}{r_{\text{bR}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A2.5})$$

$$A_{\text{KopfR}} = \frac{1}{2} \cdot s_{\text{aR}} \cdot r_{\text{aR}} \quad (\text{A2.6})$$

$$A_{\text{EvorR}} = \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bR}}^2 \cdot \left( \frac{r_{\text{aR}}^2}{r_{\text{bR}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bR}}^2 \cdot \left( \frac{\eta_2^2}{r_{\text{bR}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A2.7})$$

- Hohlrad

$$A_{\text{EvoIH}} = \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bH}}^2 \cdot \left( \frac{\zeta_1^2}{r_{\text{bH}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bH}}^2 \cdot \left( \frac{r_{\text{aH}}^2}{r_{\text{bH}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A2.8})$$

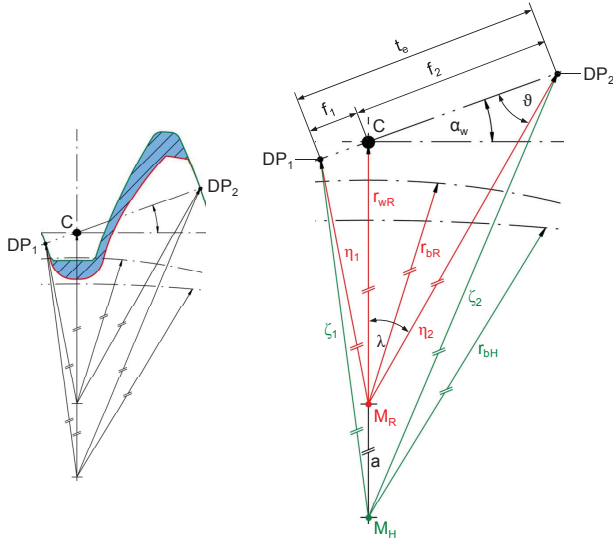
$$A_{\text{KopfH}} = \frac{1}{2} \cdot s_{\text{aH}} \cdot r_{\text{aH}} \quad (\text{A2.9})$$

$$A_{\text{EvoMH}} = \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bH}}^2 \cdot \left( \frac{r_{\text{fH}}^2}{r_{\text{bH}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bH}}^2 \cdot \left( \frac{r_{\text{aH}}^2}{r_{\text{bH}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A2.10})$$

$$A_{\text{FußH}} = \frac{1}{2} \cdot s_{\text{fH}} \cdot r_{\text{fH}} \quad (\text{A2.11})$$

$$A_{\text{EvorH}} = \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bH}}^2 \cdot \left( \frac{r_{\text{fH}}^2}{r_{\text{bH}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \cdot r_{\text{bH}}^2 \cdot \left( \frac{\zeta_2^2}{r_{\text{bH}}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A2.12})$$

Um gemeinsame Abhängigkeiten des Eingriffsverlaufs für die Ritzel- und Hohlradflächen einfließen zu lassen, werden die Abstände  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  als Funktionen der Variablen  $f_1$  und  $f_2$  (Bild A2.2 rechts) ersetzt. Die Variable  $f_2$ , die vom Winkel  $\lambda$  abhängig ist und über den Kosinussatz ermittelt wird, beschreibt den Abstand des Dichtpunktes  $\text{DP}_2$  auf der Eingriffsgeraden zum Wälzpunkt C. Durch die Differenzbildung aus Eingriffsteilung  $t_e$  und  $f_2$  erhält man die Variable  $f_1$ , die den Abstand des Dichtpunktes  $\text{DP}_1$  zum Wälzpunkt C beschreibt (Bild A2.2).

**Bild A2.2:** Ersatz der Abstände durch Variablen auf der Eingriffslinie

$$f_2 = \sqrt{r_{wR}^2 + \left( r_{wR}^2 \cdot \frac{\sin(\pi/2 + \alpha_w)}{\sin(\vartheta)} \right) + 2 \cdot r_{wR}^2 \cdot \left( \frac{\sin(\pi/2 + \alpha_w)}{\sin(\vartheta)} \right)} \quad (\text{A2.13})$$

$$f_1 = t_e - f_2 \quad (\text{A2.14})$$

$$\eta_1 = \sqrt{r_{wR}^2 + (t_e - f_2)^2 - 2 \cdot r_{wR} \cdot (t_e - f_2) \cdot \cos(\pi/2 - \alpha_w)} \quad (\text{A2.15})$$

$$\eta_2 = \sqrt{r_{wR}^2 + f_2^2 - 2 \cdot r_{wR} \cdot f_2 \cdot \cos(\pi/2 + \alpha_w)} \quad (\text{A2.16})$$

$$\zeta_1 = \sqrt{r_{wH}^2 + (t_e - f_2)^2 - 2 \cdot r_{wH} \cdot (t_e - f_2) \cdot \cos(\pi/2 - \alpha_w)} \quad (\text{A2.17})$$

$$\zeta_2 = \sqrt{r_{wH}^2 + f_2^2 - 2 \cdot r_{wH} \cdot f_2 \cdot \cos(\pi/2 + \alpha_w)} \quad (\text{A2.18})$$

Zur einfachen Abhängigkeit einer Variablen wird künftig die Variable  $f_2$  nur noch mit  $f$  bezeichnet und die Variable  $f_1$  entsprechend der geometrischen Abhängigkeit  $f_1 = t_e - f_2$  ausgedrückt.

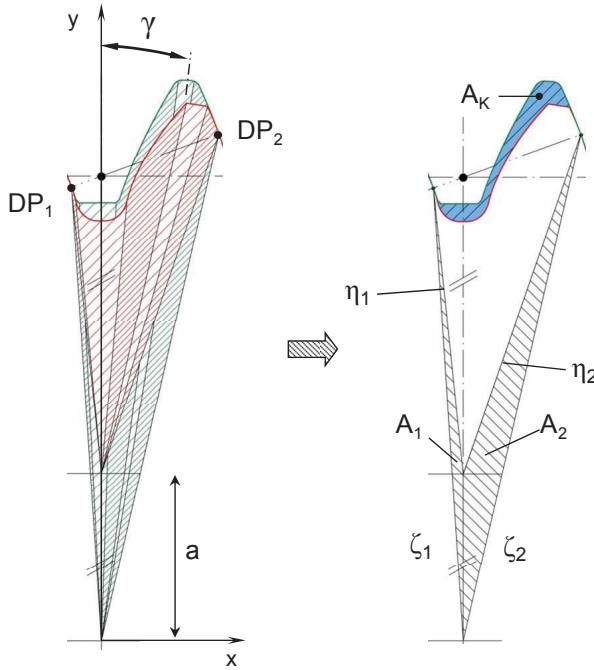
Somit ergeben sich die Gesamtflächen des Ritzels und des Hohlrades.

$$\begin{aligned}
 A_{\text{Ritzel}} = & \frac{1}{6} \cdot r_{bR}^2 \cdot \left( \frac{r_{wR}^2 + (t_e - f)^2 - 2 \cdot r_{wR} \cdot (t_e - f) \cdot \cos(\pi/2 - \alpha_w)}{r_{bR}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \\
 & \frac{1}{6} \cdot r_{bR}^2 \cdot \left( \frac{r_{wR}^2 + f^2 - 2 \cdot r_{wR} \cdot f \cdot \cos(\pi/2 + \alpha_w)}{r_{bR}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \\
 & \frac{1}{3} \cdot r_{bR}^2 \cdot \left( \frac{r_{aR}^2}{r_{bR}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot e_{fFR} \cdot r_{bR} - \frac{\pi}{8} \cdot e_{fFR}^2 + \frac{1}{2} \cdot s_{aR} \cdot r_{aR}
 \end{aligned} \quad (A2.19)$$

$$\begin{aligned}
 A_{\text{Hohlrad}} = & \frac{1}{6} \cdot r_{bH}^2 \cdot \left( \frac{r_{wH}^2 + (t_e - f)^2 - 2 \cdot r_{wH} \cdot (t_e - f) \cdot \cos(\pi/2 - \alpha_w)}{r_{bH}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \\
 & \frac{1}{6} \cdot r_{bH}^2 \cdot \left( \frac{r_{wH}^2 + f^2 - 2 \cdot r_{wH} \cdot f \cdot \cos(\pi/2 + \alpha_w)}{r_{bH}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \\
 & \frac{1}{3} \cdot r_{bH}^2 \cdot \left( \frac{r_{fH}^2}{r_{bH}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \cdot r_{bH}^2 \cdot \left( \frac{r_{aH}^2}{r_{bH}^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot s_{aH} \cdot r_{aH} + \frac{1}{2} \cdot s_{fH} \cdot r_{fH}
 \end{aligned} \quad (A2.20)$$

Die Restfläche  $A_K$ , die multipliziert mit der Zahnradbreite  $b$  das Kammervolumen  $V_K$  ergibt, wird durch die Subtraktion aller betreffenden Flächen zwischen Hohlrad- und Ritzelkontur ermittelt. Die Fläche des Hohlrads, subtrahiert von der Fläche des Ritzels ergibt die Restfläche (Bild A2.3), die sich zwischen dem Ritzel- und Hohlradmitelpunkt und den Eingriffspunkten ergibt. Diese beinhaltet die zwei Dreiecke  $A_1$  und  $A_2$  (schwarz schraffiert in Bild A2.3), die noch subtrahiert werden müssen, um die Restfläche  $A_K$  zu erhalten.





**Bild A2.3:** Restfläche zwischen den Verzahnungen und den Mittelpunkten

Die Fläche der Dreiecke  $A_1$  und  $A_2$  lassen sich durch die folgenden Gleichungen nach der Heronschen Formel beschreiben:

$$A_1 = \sqrt{s_1 \cdot (s_1 - \eta_1) \cdot (s_1 - \zeta_1) \cdot (s_1 - |a|)} \quad (\text{A2.21})$$

$$A_2 = \sqrt{s_2 \cdot (s_2 - \eta_2) \cdot (s_2 - \zeta_2) \cdot (s_2 - |a|)} \quad (\text{A2.22})$$

Die Variablen  $s_1$  respektive  $s_2$  entsprechen jeweils dem halben Umfang des betrachteten Dreiecks.

$$s_1 = \frac{\eta_1 + \zeta_1 + |a|}{2} \quad (\text{A2.23})$$

$$s_2 = \frac{\eta_2 + \zeta_2 + |a|}{2} \quad (\text{A2.24})$$

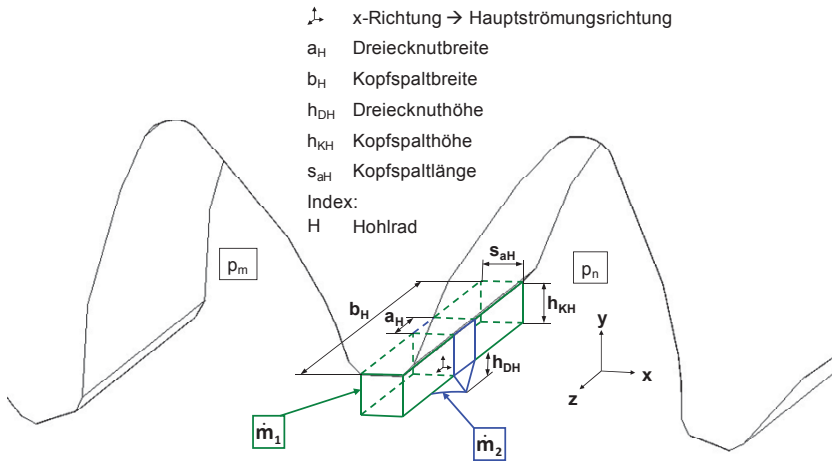
Multipliziert man die Restfläche  $A_K$  mit der Zahnradbreite  $b$  erhält man das Kammervolumen  $V_K$  nach Gleichung (A2.25) und somit auch den Kammervolumenverlauf über den Abstand  $f$ . Möchte man nun für weitere Berechnungen die Funktion von  $A_K$  über den allgemein definierten Drehwinkel  $\gamma$  erhalten, müssen die erhaltenen Schnittpunkte  $DP_1$  und  $DP_2$  über die trigonometrischen Winkelfunktionen umgerechnet werden (siehe Bild A2.3 links).

$$V_K = (A_{\text{Hohlrad}} - A_{\text{Ritzel}} - A_1 - A_2) \cdot b = A_K \cdot b \quad (\text{A2.25})$$

## A3 - Ergänzungen zu Kapitel 7

### A3.1 Kopfspaltstromsegment an der Hohlradverzahnung

Das Kopfspaltsegment lässt sich wie in Bild A3.1 zu sehen ist, in zwei Massenströme  $\dot{m}_1$  und  $\dot{m}_2$  unterteilen. Die Trennung dieser eigentlich zusammenhängenden Massenströme ist notwendig, um die Betrachtung einer Dreiecksnut in der Sichel zur sanfteren Druckanpassung im Berechnungsmodell zu ermöglichen.



**Bild A3.1:** Lage und Bemaßungen des Kopfspaltsegments

Mit der Gleichung (4.18) aus Kapitel 4.4 kann das Kräftegleichgewicht am Kopfspaltsegment für beide Massenströme aufgestellt werden:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (\text{A3.1})$$

Die Schubspannungsverteilung lässt sich durch eine erste Integration nach x mit den entsprechenden Grenzen über folgende Gleichung beschreiben:

$$\frac{\Delta p_{mn}}{s_{aH}} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (\text{A3.2})$$

wobei  $\Delta p_{mn}$  die zwischen zwei aufeinander folgenden Zahnkammern herrschende Druckdifferenz ist. Der Index m steht dabei für die beliebige Zahnkammer  $K_m$ , die der Zahnkammer  $K_n$  um eine Zahnteilung vorausgeht. Eine weitere Integration von Gleichung (A3.2) nach y ergibt für die Schubspannung  $\tau$ :

$$\tau = y \cdot \frac{\Delta p_{mn}}{s_{aH}} + C_1 \quad (A3.3)$$

Durch das Einsetzen des Newton'schen Schubspannungsgesetzes nach Gleichung (4.16) in Gleichung (A3.3) und der Integration nach  $y$  erhält man die Geschwindigkeitsverteilung für Bild A3.1.

$$v(y) = -\frac{y^2}{2\eta} \cdot \frac{\Delta p_{mn}}{s_{aH}} - C_1 \cdot y + C_2 \quad (A3.4)$$

Um die Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  zu ersetzen, gelten folgende Randbedingungen:

$$\begin{aligned} y = 0; & \quad v(0) = 0 \\ y = h_{KH}; & \quad v(h_{KH}) = -\omega_H \cdot r_{aH} \end{aligned} \quad (A3.5)$$

Durch das Einsetzen der Randbedingungen in Gleichung (A3.4) ergeben sich die Integrationskonstanten zu:

$$\begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_1 &= -\frac{\Delta p_{mn}}{2 \cdot \eta \cdot s_{aH}} \cdot h_{KH} + \frac{\omega_H \cdot r_{aH}}{h_{KH}} \end{aligned} \quad (A3.6)$$

Diese werde entsprechend in Gleichung (A3.4) substituiert und man erhält die zur  $y$ -Richtung abhängige Geschwindigkeitsfunktion.

$$v(y) = \frac{\Delta p_{mn}}{2 \cdot \eta \cdot s_{aH}} \left( -y^2 + h_{KH} \cdot y \right) - \frac{\omega_H \cdot r_{aH}}{h_{KH}} \cdot y \quad (A3.7)$$

Der Massenstrom ergibt sich allgemein durch die zweimalige Integration der Geschwindigkeitsfunktion nach  $dy$  und  $dz$  und durch die Multiplikation mit der Dichte.

$$\dot{m} = \rho \iiint v(y) dy dz \quad (A3.8)$$

Mit den entsprechenden Integrationsgrenzen aus Bild A3.1 lässt sich die Massenstromgleichung für das erste Strömungssegment am Zahnkopf berechnen.

$$\dot{m}_1 = \rho \cdot 2 \int_0^{(b_H - a_H)/2} \int_0^{h_{KH}} v(y) dy dz \quad (A3.9)$$

Die Durchführung der zweifachen Integration über die Integrationsgrenzen ergibt den Massenstrom  $\dot{m}_1$ .

$$\dot{m}_1 = \rho \cdot \frac{(b_H - a_H) \cdot h_{KH}^3}{12 \cdot \eta \cdot s_{aH}} \left( \Delta p_{mn} - \frac{6 \cdot \eta \cdot r_{aH} \cdot s_{aH} \cdot \omega_H}{h_{KH}^2} \right) \quad (A3.10)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$	$\underbrace{\hspace{10em}}$	$\underbrace{\hspace{10em}}$
Kehrwert des hydraulischen Widerstandes am Hohlradkopfspalt	Druckdifferenz von zwei aufeinander folgenden Zahnlücken	Druckminderung durch Schleppströmung

Für die Herleitung des Massenstroms  $\dot{m}_2$  gilt bis zur Gleichung (A3.4) die gleiche Vorgehensweise wie für den Massenstrom  $\dot{m}_1$ . Es ergeben sich jedoch durch die veränderten Randbedingungen neue Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$ .

$$C_2 = 0$$

$$C_1 = -\frac{\Delta p_{mn}}{2 \cdot \eta \cdot s_{aH}} \cdot (h_{KH} + h_{DH}) + \frac{\omega_H \cdot r_{aH}}{(h_{KH} + h_{DH})} \quad (A3.11)$$

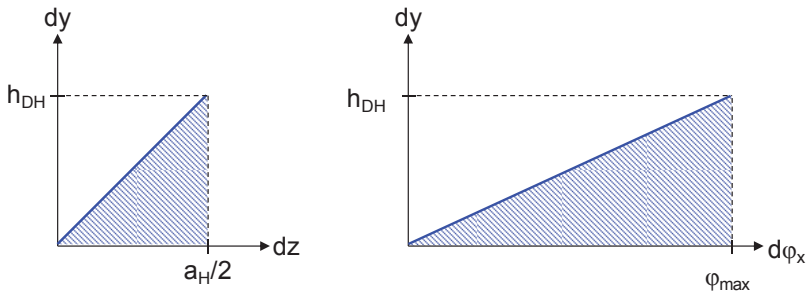
Die Geschwindigkeitsfunktion ergibt sich entsprechend für die unterschiedlichen Randbedingungen.

$$v(y) = \frac{\Delta p_{mn}}{2 \cdot \eta \cdot s_{aH}} \left( -y^2 + (h_{KH} + h_{DH}) \cdot y \right) - \frac{\omega_H \cdot r_{aH}}{(h_{KH} + h_{DH})} \cdot y \quad (A3.12)$$

Es gilt für die Beschreibung der Dreiecknuthöhe, wie in Bild A3.2 dargestellt, folgender mathematischer Zusammenhang:

$$dz = \frac{a_H}{2 \cdot h_{DH}} dy \quad (A3.13)$$

Die Nuthöhe  $h_{DH}$  ändert sich in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi_x$ . Auf die genauen Geometrien wird in Kapitel A3.6 eingegangen.



**Bild A3.2:** Mathematische Beziehung der Dreiecknut

Durch das Einsetzen der Geschwindigkeitsfunktion unter Beachtung der mathematischen Beziehung aus Gleichung (A3.13) in die allgemeine Massenstromgleichung und der Integrationsgrenzen kann mit der anschließenden zweifachen Integration der Massenstrom  $\dot{m}_2$  bestimmt werden.

$$\dot{m}_2 = \rho \cdot \underbrace{\frac{a_H^2 \cdot (h_{KH} + h_{DH})^3}{24 \cdot \eta \cdot s_{aH} \cdot h_{DH}}}_{\text{Kehrwert des hydraulischen Widerstandes an der Hohlradkopfspalt-Dreiecknut}} \underbrace{\left( \Delta p_{mn} \right)}_{\text{Druckdifferenz von zwei aufeinander folgenden Zahnücken}} - \underbrace{\frac{6 \cdot \eta \cdot r_{aH} \cdot s_{aH} \cdot \omega_H}{(h_{KH} + h_{DH})^2}}_{\text{Druckminderung durch Schleppströmung}} \quad (\text{A3.14})$$

Kehrwert des hydraulischen Widerstandes an der Hohlradkopfspalt-Dreiecknut

Druckdifferenz von zwei aufeinander folgenden Zahnücken

Druckminderung durch Schleppströmung

Der Gesamtmassenstrom ergibt sich durch die Addition der beiden Massenströme  $\dot{m}_1$  aus Gleichung (A3.10) und  $\dot{m}_2$  aus Gleichung (A3.14).

$$\dot{m}_{1,2} = \underbrace{\rho \cdot \frac{a_H^2 \cdot (h_{KH} + h_{DH})^3 + h_{KH}^3 \cdot (b_H - a_H) \cdot 2 \cdot h_{DH}}{24 \cdot \eta \cdot s_{aH} \cdot h_{DH}}}_{\text{Kehrwert des hydraulischen Widerstandes am Hohlradkopfspalt}} \underbrace{\left( \Delta p_{mn} \right)}_{\text{Druckdifferenz von zwei aufeinander folgenden Zahnücken}} - \underbrace{\frac{6 \cdot \eta \cdot r_{aH} \cdot s_{aH} \cdot \omega_H \cdot (a_H^2 \cdot (h_{KH} + h_{DH}) + h_{KH} \cdot (b_H - a_H) \cdot 2 \cdot h_{DH})}{(a_H^2 \cdot (h_{KH} + h_{DH})^3 + h_{KH}^3 \cdot (b_H - a_H) \cdot 2 \cdot h_{DH})}}_{\text{Druckminderung durch Schleppströmung}} \quad (\text{A3.15})$$

Kehrwert des hydraulischen Widerstandes am Hohlradkopfspalt

Druckdifferenz von zwei aufeinander folgenden Zahnücken

Druckminderung durch Schleppströmung

In dieser Systembetrachtung liegt die Besonderheit vor, dass durch die Wahl von  $h_{DH}$  und  $a_H$  das Zu- bzw. Abschalten einer Dreiecknut möglich ist. Gleichung (7.7) enthält zusätzliche Freiheitsgrade mit den Variablen  $h_{DH}$  und  $a_H$ . Diese können beliebig gewählt werden ohne das betrachtete System zu beeinflussen. Wird jedoch die Variable  $a_H$  gleich Null gesetzt, reduziert sich Gleichung (7.7) auf die Massenstromgleichung nach (A3.10) für den Kopfspalt ohne Dreiecknut.

Die Gleichungen (A3.10) und (A3.14) lassen sich nach den auftretenden Strömungsarten zu folgender allgemeiner Kopfspaltstromgleichung zusammenfassen.

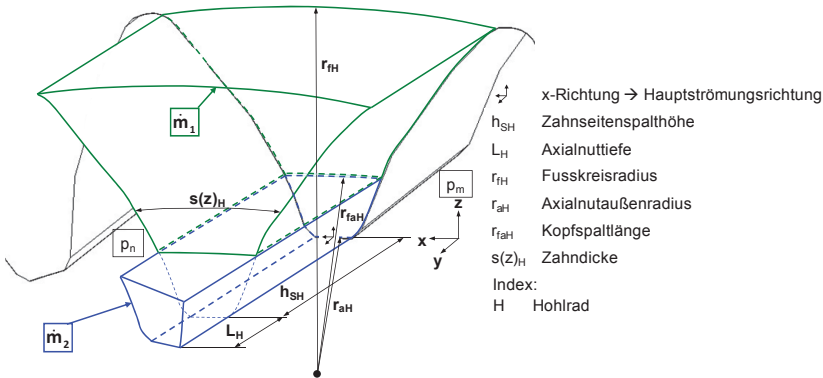
$$\dot{m} = \rho \cdot \frac{1}{R_{Kmn}} (\Delta p_{mn} - \Delta p_{KSmn}) \quad (A3.16)$$

Diese setzt sich zusammen aus dem Kehrwert des hydraulischen Widerstandes, der Dichte, der Druckdifferenz von zwei aufeinander folgenden Zahnlücken und die durch die Schleppströmung hervorgerufene Druckminderung. Die beiden Indizes mn stellen dabei den Zahnlückenwert dar. Die Zahnlücke mit dem höherwertigen Index m und somit auch die mit dem höheren Druck, eilt der Zahnlücke mit dem Index n um eine Zahnteilung voraus. Der dazwischen liegende Zahn und folglich das betrachtete Kopfspaltsegment trennt die beiden Zahnlücken voneinander.

Die unterschiedlichen Indizes sind notwendig, um sie infolge der variablen Kopfspaltgeometrie unterscheiden zu können. Auf die Spaltgeometrien soll im Verlauf des Anhangs noch genauer eingegangen werden.

### A3.2 Zahnseitenspaltsegment an der Hohlradverzahnung

Die Lage und Definitionsgrenzen des Zahnseitenspaltsegments am Hohlrad sind in Bild A3.3 aufgezeigt. Dabei liegt das Zahnseitenspaltsegment zwischen der Stirnfläche des Hohlrades und der inneren Gehäuseseitenwand bzw. der Innenseite des Pumpendeckels.



**Bild A3.3:** Lage und Bemaßungen des Zahnseitenspaltsegments

Das Zahnseitenspaltsegment lässt sich in zwei Bereiche unterteilen, über die die Massenströme  $\dot{m}_1$  und  $\dot{m}_2$  fließen. Die Geometrie der beiden Massenstromsegmente zeigt Bild A3.3. Wie bei dem Kopfspaltsegment ist auch hier eine zusätzliche Betrachtung einer Nut (Ausgleichsnut) im Gehäuse notwendig, aufgrund dessen eine Trennung der beiden Massenströme unumgänglich wird. Diese Nut stellt eine zusätzliche Befüllungsmöglichkeit in dem Saugraum zugewandten Druckaufbaubereich bzw. eine Ausgleichsnut in dem Druckraum zugewandten Druckaufbaubereich dar. Diese Maßnahmen sorgen für eine gemäßigte Druckanpassung in den Zahnücken zur Förderdruckseite hin.

Das Geschwindigkeitsfeld lässt sich aus einer ersten Integration der Gleichung (4.18) über  $x$  und anschließendem Einsetzen des Newtonschen Schubspannungsgesetzes und einer darauf folgenden zweifachen Integration über  $y$  herleiten.

$$v(y) = \frac{y^2}{2\eta} \cdot \frac{\Delta p_{mn}}{s(z)_H} + C_1 \cdot y + C_2 \quad (A3.17)$$

Für die Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  gelten folgende Randbedingungen für  $y$  und damit für die Geschwindigkeitsfunktion:



$$\begin{aligned} y &= 0; & v(0) &= \omega_H \cdot r(z) = \omega_H \cdot (r_{faH} + z) \\ y &= h_{SH}; & v(h_{SH}) &= 0 \end{aligned} \quad (A3.18)$$

Der Radius  $r(z)$  ist von  $z$  abhängig und beginnt mit dem konstanten Maß  $r_{faH}$ . Nach außen hin wird er immer größer und beeinflusst somit das Geschwindigkeitsfeld. Werden die Randbedingungen in das Geschwindigkeitsfeld aus Gleichung (A3.17) eingesetzt, ergeben sich die Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  zu:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{\Delta p_{mn}}{2 \cdot \eta \cdot s(z)_H} \cdot h_{SH} - \frac{\omega_H \cdot (r_{faH} + z)}{h_{SH}} \\ C_2 &= \omega_H \cdot (r_{faH} + z) \end{aligned} \quad (A3.19)$$

Aufgrund der sich über den Radius ändernde Zahndicke  $s(z)_H$  in Gleichung (A3.17) ist eine weitere Betrachtung zur Geometrieabhängigkeit notwendig. Die Zahndicke lässt sich mit Gleichung (A3.20) aus [48] ersetzen, wobei zu beachten ist, dass die Involutfunktion zur Vereinfachung der Integration als konstant angenommen werden kann.

$$\begin{aligned} s(z)_H &= 2 \cdot (r_{faH} + z) \cdot \left( \frac{\pi + 4 \cdot x_H \cdot \tan \alpha_H}{2 \cdot z_H} + \text{inv} \alpha_H - \text{inv} \alpha_{mH} \right) \\ &= 2 \cdot (r_{faH} + z) \cdot A_H \end{aligned} \quad (A3.20)$$

Die Geschwindigkeitsfunktion und die Integrationsgrenzen für  $dy$  und  $dz$  werden in die Massenstromgleichung eingesetzt. Mit Gleichung (A3.20) ergibt sich nach der Integration gemäß der Gleichung (A3.8) der Massenstrom des ersten Segments.

$$\dot{m}_1 = \rho \cdot \underbrace{\frac{h_{SH}^3 \cdot \ln \left( \left| \frac{r_{fH}}{r_{faH}} \right| \right)}{24 \cdot \eta \cdot A_H}}_{\text{Kehrwert des hydraulischen Widerstandes des Zahnseiten-spaltsegments}} \cdot \underbrace{\left( \Delta p_{mn} - \frac{6 \cdot \eta \cdot A_H \cdot \omega_H \cdot (r_{fH}^2 - r_{faH}^2)}{h_{SH}^2 \cdot \ln \left( \left| \frac{r_{fH}}{r_{faH}} \right| \right)} \right)}_{\substack{\text{Druckdiffe-} \\ \text{renz von zwei} \\ \text{aufeinander} \\ \text{folgenden} \\ \text{Zahnlücken}}} \quad (A3.21)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{Druckminde-} \\ \text{rung durch} \\ \text{Schlepp-} \\ \text{strömung}}}$

Für den Massenstrom  $\dot{m}_2$  gilt dieselbe Vorgehensweise wie für den Massenstrom  $\dot{m}_1$  bis zu den Überlagerungen am Geschwindigkeitsfeld nach Gleichung (A3.19).

Ab den Randbedingungen stellt sich ein Unterschied zwischen den Massenströmen  $\dot{m}_1$  und  $\dot{m}_2$  ein.

Mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} y &= 0; & v(0) &= \omega_H \cdot r(z) = \omega_H \cdot (r_{aH} + z) \\ y &= (h_{SH} + L_H); & v(h_{SH} + L_H) &= 0 \end{aligned} \quad (A3.22)$$

lassen sich die Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  ermitteln:

$$\begin{aligned} C_2 &= \omega_H \cdot (r_{aH} + z) \\ C_1 &= -\frac{\Delta p_{mn}}{2 \cdot \eta \cdot s(z)_H} \cdot (h_{SH} + L_H) - \frac{\omega_H \cdot (r_{aH} + z)}{(h_{SH} + L_H)} \end{aligned} \quad (A3.23)$$

Werden diese anschließend in das Geschwindigkeitsfeld nach Gleichung (A3.17) eingesetzt, ergibt sich die zur y-Richtung abhängige Geschwindigkeitsfunktion.

$$v(y) = \frac{\Delta p_{mn}}{2 \cdot \eta \cdot s(z)_H} (y^2 - (h_{SH} + L_H) \cdot y) + \omega_H \cdot (r_{aH} + z) \left( -\frac{y}{(h_{SH} + L_H)} + 1 \right) \quad (A3.24)$$

Die sich über den Radius ändernde Zahndicke  $s(z)_H$  wird analog zur Gleichung (A3.20) berechnet. Die Zahndicke hat aufgrund der Lage des Strömungssegments allerdings den Startwert  $r_{aH}$ .

$$\begin{aligned} s(z)_H &= 2 \cdot (r_{aH} + z) \cdot \left( \frac{\pi + 4 \cdot x_H \cdot \tan \alpha_H}{2 \cdot z_H} + \text{inv } \alpha_H - \text{inv } \alpha_{mH} \right) \\ &= 2 \cdot (r_{aH} + z) \cdot A_H \end{aligned} \quad (A3.25)$$

Die Integration der Geschwindigkeitsfunktion (A3.24) mit den gewählten Grenzen aus Bild A3.3 ergibt die Gleichung des Massenstroms  $\dot{m}_2$ .

$$\dot{m}_2 = \rho \cdot \frac{(h_{SH} + L_H)^3 \cdot \ln \left( \frac{|r_{faH}|}{|r_{aH}|} \right)}{24 \cdot \eta \cdot A_H} \left( \underbrace{\Delta p_{mn}}_{\text{Druckdifferenz von zwei aufeinander folgenden Zahn- lücken}} - \underbrace{\frac{6 \cdot \eta \cdot A_H \cdot \omega_H \cdot (r_{faH}^2 - r_{aH}^2)}{(h_{SH} + L_H)^2 \cdot \ln \left( \frac{|r_{faH}|}{|r_{aH}|} \right)}}_{\text{Druckminderung durch Schleppströmung}} \right) \quad (A3.26)$$

Kehrwert des hydraulischen Widerstandes des Zahnseitenspaltsegments mit Ausgleichsnut

Druckdifferenz von zwei aufeinander folgenden Zahn- lücken

Druckminderung durch Schleppströmung

Werden die beiden Massenströme  $\dot{m}_1$  und  $\dot{m}_2$  aus Gleichung (A3.21) und (A3.26) addiert, ergibt sich der Gesamtmassenstrom  $\dot{m}_{12}$  zu:

$$\dot{m}_{1,2} = \underbrace{\rho \cdot \frac{(h_{SH} + L_H)^3 \cdot \ln\left(\frac{r_{faH}}{r_{aH}}\right) + h_{SH}^3 \cdot \ln\left(\frac{r_{fH}}{r_{faH}}\right)}{24 \cdot \eta \cdot A_H}}_{\text{Kehrwert des hydraulischen Widerstandes}} \underbrace{\left( \Delta p_{mn} - \frac{6 \cdot \eta \cdot A_H \cdot \omega_H \cdot ((h_{SH} + L_H) \cdot (r_{faH}^2 - r_{aH}^2) + h_{SH} \cdot (r_{fH}^2 - r_{faH}^2))}{(h_{SH} + L_H)^3 \cdot \ln\left(\frac{r_{faH}}{r_{aH}}\right) + h_{SH}^3 \cdot \ln\left(\frac{r_{fH}}{r_{faH}}\right)} \right)}_{\substack{\text{Druckdifferenz von zwei aufeinander folgenden Zahnflü-} \\ \text{Druckminde-} \\ \text{rung durch} \\ \text{Schlepp-} \\ \text{strömung}}} \quad (A3.27)$$

Die Gleichung (A3.27) lässt sich als vereinfachte Form beschreiben durch:

$$\dot{m} = \rho \cdot \frac{1}{R_{ZSmn}} (\Delta p_{mn} - \Delta p_{ZSSmn}) \quad (A3.28)$$

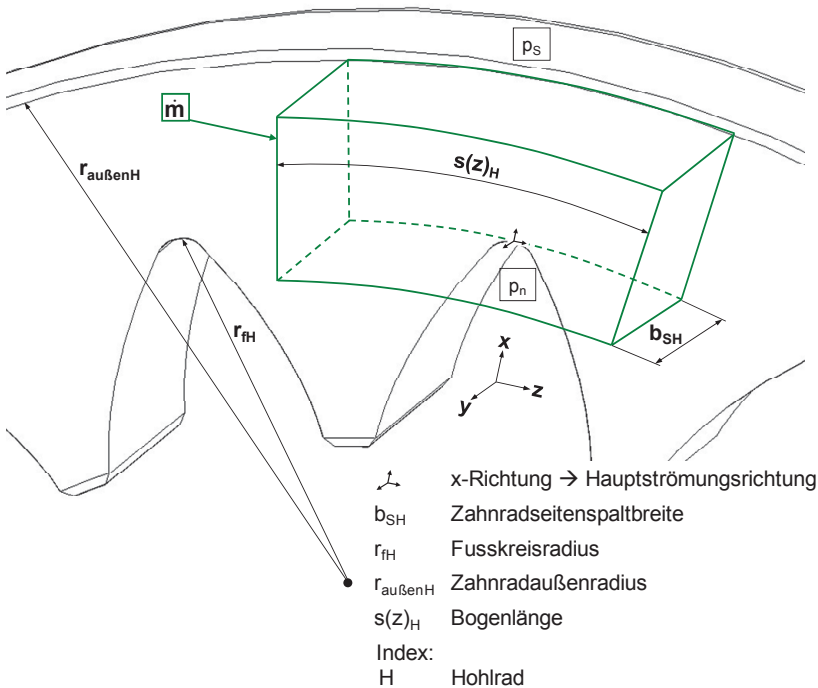
Die Indizes ZS und ZSS beschreiben die Spaltströmungen nach Arten und Orten ihrer Entstehung.

ZS Zahnseitenspalt

ZSS Zahnseitenspalt-Schleppströmung

### A3.3 Zahnradseitenspaltsegment über der Hohlradverzahnung

Bild A3.4 zeigt die Definitionen für das Zahnradseitenspaltsegment über der Hohlradverzahnung. Dieses befindet sich zwischen der Stirnfläche des Hohlrades und der inneren Gehäuseseitenwand bzw. der Innenseite des Pumpendeckels.



**Bild A3.4:** Lage und Bemaßungen des Zahnradseitenspaltsegments

Strömungen treten nicht nur in den Umfangsrichtungen wie beim Kopf- bzw. Zahnseitenspaltsegment auf, sondern ebenso in Radialrichtung. Diese Strömungen sind darauf zurückzuführen, dass das Medium durch die rotatorische Bewegung eine Fliehkraft in radialer Richtung erfährt. Durch das Zahnradseitensegment lässt sich der Massenstrom, hervorgerufen durch Druck- und Fliehkraftströmung, berechnen.

Die vereinfachte Grundgleichung zum Kräftegleichgewicht am Zahnradseitenspaltsegment für die einzelnen Massenströme wird mit dem Term der Fliehkraft erweitert.

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} - \rho \cdot r \cdot \omega^2 \quad (\text{A3.29})$$

Zweimal über  $dy$  integriert, ergibt Gleichung (A3.29) mit dem eingesetzten Schubspannungsgesetz das Geschwindigkeitsfeld (A3.30).

$$v(y) = \frac{1}{\eta} \cdot \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot r \cdot \omega_H^2 \right) \frac{y^2}{2} + C_1 \cdot y + C_2 \quad (\text{A3.30})$$

Aus Bild A3.4 ergeben sich die Randbedingungen nach den Gleichungen (A3.31) für die Geschwindigkeiten, die zur Ermittlung der Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  für die Geschwindigkeitsverteilung notwendig sind.

$$\begin{aligned} y = 0; & \quad v(0) = 0 \\ y = b_{SH}; & \quad v(b_{SH}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A3.31})$$

Werden die Randbedingungen in die Geschwindigkeitsverteilung eingesetzt, lassen sich die Integrationskonstanten bestimmen zu:

$$\begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_1 &= \frac{b_{SH}}{2\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho \cdot r \cdot \omega_H^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{A3.32})$$

Substituiert man die Integrationskonstanten im Geschwindigkeitsfeld, lässt sich daraus die Geschwindigkeitsfunktion herleiten.

$$v(y) = \frac{1}{\eta} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot r \cdot \omega_H^2 \right) \left( \frac{y^2}{2} - \frac{b_{SH} \cdot y}{2} \right) \quad (\text{A3.33})$$

Aus der Integration der Geschwindigkeitsgleichung  $v(y)$  über die Integrationsgrenzen und der anschließenden Multiplikation mit der Dichte des Mediums resultiert der Massenstrom des Zahnradseitensegments in radialer Richtung.

$$\dot{m} = \rho \int_0^{2\pi/4} \frac{1}{\eta} \left( -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho \cdot r \cdot \omega_H^2 \right) \cdot \left( -\frac{b_{SH}^3}{12} \right) r d\varphi \quad (\text{A3.34})$$

Eine weitere Integration über den Radius der Gleichung (A3.34) ergibt die endgültige Massenstromgleichung für das Zahnradseitenspaltsegment in Radialrichtung.

$$\dot{m} = \rho \cdot \frac{\pi \cdot b_{SH}^3}{6 \cdot \eta \cdot z_H \cdot \ln \left( \frac{|r_{au\beta en H}|}{|r_{fH}|} \right)} \left( \underbrace{\Delta p_{ns}}_{\text{Kehrwert des hydraulischen Widerstandes am Zahnradseitensegment}} - \underbrace{\frac{1}{2} \rho \cdot \omega_H^2 (r_{au\beta en H}^2 - r_{fH}^2)}_{\text{Druckdifferenz zwischen einer Zahnücke und dem Saugdruckniveau am Zahnradaußenkörper}} \underbrace{\Bigg)}_{\text{Druckreduzierung durch die auftretende Fliehkraftströmung}} \quad (A3.35)$$

Gleichung (A3.35) lässt sich weiterhin nach den hydraulischen Widerständen und auftretenden Druckdifferenzen zusammenfassen:

$$\dot{m} = \rho \cdot \frac{1}{R_{ZRR}} (\Delta p_{ns} - \Delta p_{ZRF}) \quad (A3.36)$$

### A3.4 Massenstromgleichungen für das Ritzel

Die Gleichungen für das Ritzel leiten sich entsprechend denen am Hohlrad ab.

Kopfspaltmassenstrom

$$\dot{m}_{1,2} = \frac{\rho \cdot (a_R^2 \cdot (h_{KR} + h_{DR})^3 + h_{KR}^3 \cdot (b_R - a_R) \cdot 2 \cdot h_{DR})}{24 \cdot \eta \cdot s_{aR} \cdot h_{DR}} \cdot \left( \Delta p_{mn} - \frac{6 \cdot \eta \cdot r_{aR} \cdot s_{aR} \cdot \omega_R \cdot (a_R^2 \cdot (h_{KR} + h_{DR}) + h_{KR} \cdot (b_R - a_R) \cdot 2 \cdot h_{DR})}{(a_R^2 \cdot (h_{KR} + h_{DR})^3 + h_{KR}^3 \cdot (b_R - a_R) \cdot 2 \cdot h_{DR})} \right) \quad (A3.37)$$

Zahnseitenspaltmassenstrom

$$\dot{m}_{1,2} = \frac{\rho \cdot \left( (h_{SR} + L_R)^3 \cdot \ln \left( \frac{|r_{aR}|}{|r_{afR}|} \right) + h_{SR}^3 \cdot \ln \left( \frac{|r_{afR}|}{|r_{fR}|} \right) \right)}{24 \cdot \eta \cdot A_R} \cdot \left( \Delta p_{mn} - \frac{6 \cdot \eta \cdot A_R \cdot \omega_R \cdot ((h_{SR} + L_R) \cdot (r_{aR}^2 - r_{afR}^2) + h_{SR} \cdot (r_{afR}^2 - r_{fR}^2))}{((h_{SR} + L_R)^3 \cdot \ln \left( \frac{|r_{aR}|}{|r_{afR}|} \right) + h_{SR}^3 \cdot \ln \left( \frac{|r_{afR}|}{|r_{fR}|} \right))} \right) \quad (A3.38)$$

Zahnradseitenspaltmassenstrom

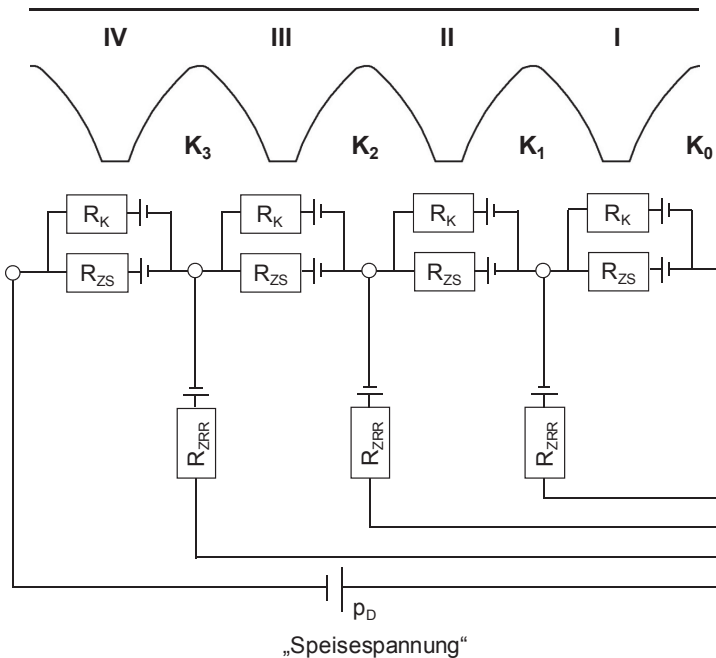
$$\dot{m} = \frac{\pi \cdot \rho \cdot b_{SR}^3}{6 \cdot \eta \cdot z_R \cdot \ln \left( \frac{|r_{fR}|}{|r_{außenR}|} \right)} \cdot \left( \Delta p_{ns} + \frac{1}{2} \rho \cdot \omega_R^2 (r_{fR}^2 - r_{außenR}^2) \right) \quad (A3.39)$$

Alle aufgezeigten Massenströme der Spalte werden als Endergebnis ausgedrückt über den hydraulischen Widerstand R bzw. den hydraulischen Leitwert 1/R, sowie den Schlepp- und Fliehkraftströmungen, falls diese vorhanden sind.

$$\dot{m} = \rho \cdot \frac{1}{R} (\Delta p_{mn} - \Delta p_{\text{Schlepp/Fliehkraft}}) \quad (A3.40)$$

### A3.5 Hydraulisches Netzwerk und Druckmatrix für das Hohlrad

Zur Übersicht ist es einfacher das aufgezeigte Netzwerk aus Kapitel 7.1.1 auf eine Ebene abzuwickeln (Bild A3.5). Je größer die Anzahl der Zahn­lücken im Druckaufbaubereich ist, desto größer wird das hydraulische Netzwerk, da mit jeder weiteren Zahn­lücke ein Kopfspalt-, Zahnseitenspalt- und ein Zahnradseitenspaltwiderstand hinzugefügt wird. Die Anzahl der Knotenpunkte im Druckaufbaubereich in Bild A3.5 ist gleich der Anzahl der zu bestimmenden Zahnkammerdrücke. Die Zahnkammer  $K_0$  liegt dabei auf Saugdruckniveau  $p_S$ , wohingegen sich die letzte Kammer  $K_4$  auf Förderdruckniveau  $p_D$  befindet. Die Zähne sind mit römischen Buchstaben nummeriert und die Zahn­lücken mit  $K_0 \dots K_3$  beschriftet.



**Bild A3.5:** Hydraulisches abgewickeltes Netzwerk am Hohlrad

Das Knotenpotenzialverfahren auf das oben abgebildete Netzwerk (Bild A3.5) angewendet, ergibt eine Matrix (Bild A3.6) nach dem allgemeinen Knotenpotentialverfahren, die zu lösen ist.



$\frac{1}{R_{K10}} + \frac{2}{R_{ZS10}} + \frac{1}{R_{ZRU}} - \frac{1}{R_{K21}} - \frac{1}{R_{ZS21}} - \frac{1}{R_{ZRU}}$	$0$	$0$	$p_1$	$-\frac{\Delta p_{KS10}}{R_{K10}} - \frac{\Delta p_{ZS10}}{R_{ZS10}} + \frac{\Delta p_{ZRE}}{R_{ZRR}} + \frac{\Delta p_{KS21}}{R_{K21}} + \frac{\Delta p_{ZS21}}{R_{ZS21}} + p_S \cdot \left( \frac{1}{R_{K10}} + \frac{1}{R_{ZS10}} + \frac{1}{R_{ZRU}} + \frac{1}{R_{ZRR}} \right)$
$-\frac{1}{R_{K21}} - \frac{1}{R_{ZS21}} - \frac{1}{R_{ZRU}} + \frac{1}{R_{K32}} + \frac{1}{R_{ZS32}} + \frac{1}{R_{ZRR}}$	$-\frac{1}{R_{K32}} - \frac{1}{R_{ZS32}} - \frac{1}{R_{ZRU}}$	$\dots$	$p_2$	$-\frac{\Delta p_{KS21}}{R_{K21}} - \frac{\Delta p_{ZS21}}{R_{ZS21}} + \frac{\Delta p_{ZRE}}{R_{ZRR}} + \frac{\Delta p_{KS32}}{R_{K32}} + \frac{\Delta p_{ZS32}}{R_{ZS32}} + \frac{p_S}{R_{ZRR}}$
$0$	$\dots$	$0$	$\vdots$	$\vdots$
$0$	$\dots$	$0$	$\vdots$	$\vdots$
$-\frac{1}{R_{K(n-1)}} - \frac{1}{R_{ZS(n-1)}} - \frac{1}{R_{ZRU}} + \frac{1}{R_{K(n+1)}} + \frac{1}{R_{ZS(n+1)}} + \frac{1}{R_{ZRR}}$	$-\frac{1}{R_{K(n-1)}} - \frac{1}{R_{ZS(n-1)}} - \frac{1}{R_{ZRU}} + \frac{1}{R_{K(n+1)}} + \frac{1}{R_{ZS(n+1)}} + \frac{1}{R_{ZRR}}$	$0$	$p_n$	$-\frac{\Delta p_{KS(n,n-1)}}{R_{K(n,n-1)}} - \frac{\Delta p_{ZS(n,n-1)}}{R_{ZS(n,n-1)}} + \frac{\Delta p_{ZRE}}{R_{ZRR}} + \frac{\Delta p_{KS(n+1,n)}}{R_{K(n+1,n)}} + \frac{\Delta p_{ZS(n+1,n)}}{R_{ZS(n+1,n)}} + p_S \cdot \left( \frac{1}{R_{K(n,n-1)}} + \frac{1}{R_{ZS(n,n-1)}} + \frac{1}{R_{ZRU}} + \frac{1}{R_{ZRR}} \right)$

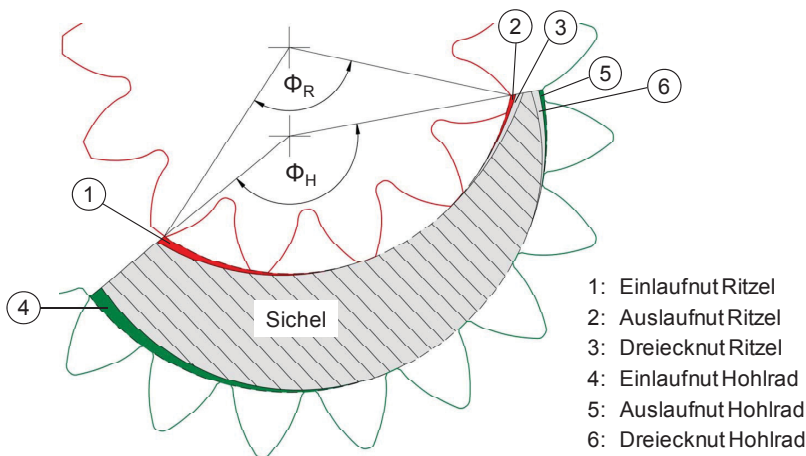
$\vec{p} =$

$\vec{m}$

Bild A3.6: Druckmatrix für die Druckaufbauzone

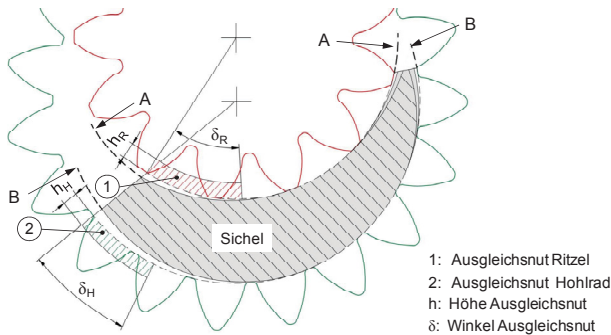
### A3.6 Spaltgeometrien im Druckaufbaubereich

In Kapitel 7.1.1 werden bereits die Grundlagen für die Kopfspalt- und Zahnseitenspaltströme erläutert. Die Besonderheit dieser Strömungen im Vergleich zu den Zahnradseitenspaltströmen in Radialrichtung liegt in der Spaltgeometrie. Das Kopfspaltsegment wird von drei variablen Spaltverläufen beeinflusst. Dabei handelt es sich beim Ritzel sowie auch beim Hohlrad um die Ein- und Auslaufnut, sowie der Dreiecksnuten, die in die Sichel gezielt radial eingefräst werden kann, um einen sanften Druckanstieg zu erreichen. Das Zahnseitenspaltsegment hingegen wird durch die Ausgleichsnut beeinflusst, die in das Gehäuse an den seitlich vorbeieilenden Zähnen, am Übergang zwischen Saugseite und Druckaufbaubereich eingefräst wird. Bild A3.7 zeigt schematisch alle eingefrästen Nutarten in der Sichel. Die Winkellänge der Sichel am Kopfkreisradius des Hohlrad, respektive am Kopfkreisradius des Ritzels, wird durch die beiden Winkel  $\Phi_H$  und  $\Phi_R$  beschrieben. Weiterhin soll aufgezeigt werden wie sich der Kopfspalthöhenverlauf entlang der Sichel über mathematische Beziehungen berechnen lässt.



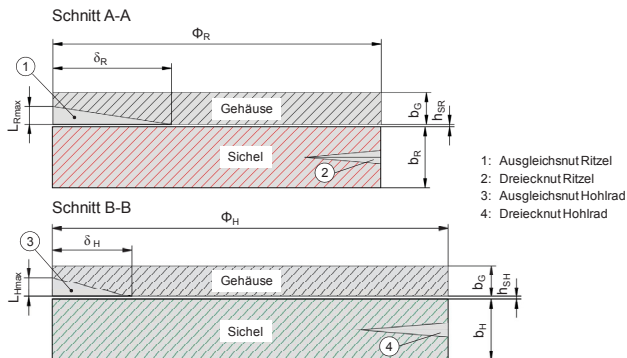
**Bild A3.7:** Nutarten in den Kopfspaltbereichen gezeigt am Schnitt durch die Sichel

Die Lage der Ausgleichsnuten wird anhand von Bild A3.8 erläutert. Die Länge der jeweiligen Nut ist durch den Winkel  $\delta$  und die Höhe durch die Bezeichnung  $h$  mit jeweiligem Index für das Ritzel und das Hohlrad charakterisiert. In Bild A3.8 werden die axialen Ausgleichsnuten im Gehäuse mit der Breite  $h$  bezeichnet, um nach Bild 7.7 die Nomenklatur auf das Strömungssegment zu übertragen. Damit wird folgerichtig die Spalthöhe im Bild A3.9 mit  $L_{Rmax}$  bzw.  $L_{Hmax}$  bezeichnet.



**Bild A3.8:** Ausgleichsnuten des Ritzels und des Hohlrads

Bild A3.9 dient zur Darstellung der eingefrästen Ausgleichsnut im Gehäuse. Für das Ritzel ist die Sicht auf die Sichel gemäß Schnitt A-A und für das Hohlrad ist die Sicht gemäß Schnitt B-B abgebildet. Die rote und grüne Schraffur soll als angrenzende Fläche zwischen den Zahnköpfen des betroffenen Zahnrads und der Sicheloberfläche gedeutet werden. Das Gehäuse ist jedoch geschnitten, um den Tiefenverlauf der axialen Ausgleichsnut zeigen zu können.

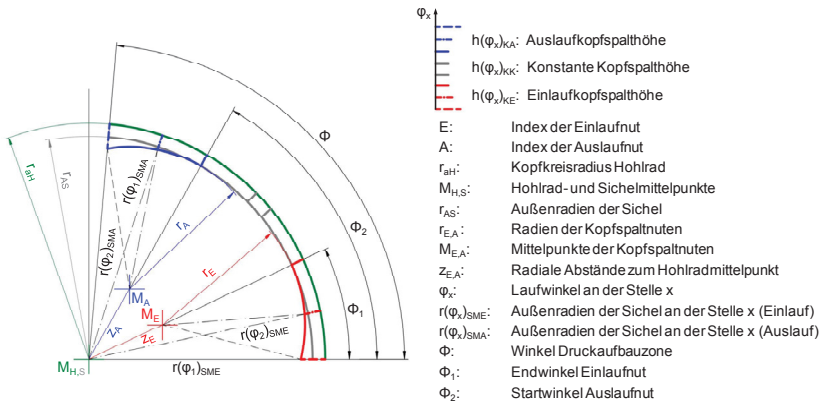


**Bild A3.9:** Ausgleichsnuten im Gehäuse

### Radiale Kopfspaltgeometrie entlang der Sichel

In Kapitel 7.1.1 wird erwähnt dass der Kopfspalt, also der Abstand zwischen Zahnkopf und Sicheloberfläche nicht konstant ist. Damit wird es notwendig eine Definition aufzustellen, über die der Kopfspalt als Funktion über den Winkel abgebildet werden kann. Die Dreiecknut, die ebenfalls in die Kopfspaltgeometrie mit einfließt, wird getrennt betrachtet und nicht an die Definition für den Kopfspalt gekoppelt. Damit soll eine getrennte Erfassung der Dreiecknut ermöglicht werden, um die Vor- und Nachteile durch eine eingefräst Nut unterscheiden zu können. Die Definitionen werden aufgrund der Ähnlichkeit zum Kopfspalt am Ritzel nur für den Kopfspalt am Hohlrad durchgeführt. Der Kopfspalt setzt sich, wie in Bild A3.10 dargestellt, aus folgenden drei Bereichen zusammen:

- Einlaufkopfspalt
- Konstanter Kopfspalt
- Auslaufkopfspalt



**Bild A3.10:** Kopfspaltgeometrie am Hohlrad

Um den Außenradius der Sichel  $r(\Phi_x)_{SM}$  an jeder beliebigen Stelle berechnen zu können, wird für die Konturbestimmung am Ein- und Auslaufkopfspalt der Kosinussatz angewendet. Das für den Kosinussatz betrachtete Dreieck setzt sich zusammen aus den radialen Abständen  $z_{E,A}$ , den Kopfspaltnutradialen  $r_{E,A}$  und den variablen Außenradien der Sichel  $r(\Phi_x)_{SME}$  bzw.  $r(\Phi_x)_{SMA}$ .

### Einlaufkopfspalthöhe $h_{KE}$

Wendet man den Kosinussatz für das betrachtete Dreieck im Einlauf an, so erhält man eine quadratische Gleichung, mit der der variable Außenradius  $r(\varphi_x)_{SME}$  bestimmt werden kann.

$$r(\varphi_x)_{SME}^2 - 2 \cdot z_E \cdot \cos(\varphi_x) \cdot r(\varphi_x)_{SME} + z_E^2 - r_E^2 = 0 \quad (A3.41)$$

Folglich lässt sich jeder Abstand  $h(\varphi_x)_{KE}$  zwischen Sichel und Hohlradzahnkopf über die Subtraktion folgender Gleichung ermitteln:

$$h(\varphi_x)_{KE} = r_{aH} - r(\varphi_x)_{SME} \quad (A3.42)$$

### Konstante Kopfspalthöhe $h_{KK}$

Zwischen den Nuten verhält sich die Kopfspalthöhe  $h_{KK}$  konstant. Die Höhe lässt sich über die Differenz zwischen dem Kopfkreisradius  $r_{aH}$  und dem gleichbleibendem Außenradius der Sichel  $r_{AS}$  ermitteln.

$$h(\varphi_x)_{KK} = r_{aH} - r_{AS} \quad (A3.43)$$

Das Intervall für den Laufwinkel im mittleren Bereich ist wie folgt definiert:

$$\varphi_{\min} = 0 \leq \varphi_x \leq (\Phi_2 - \Phi_1) = \varphi_{\max} \quad (A3.44)$$

### Auslaufkopfspalthöhe $h_{KA}$

Für den Auslaufkopfspalt wird dieselbe Methode wie beim Einlaufkopfspalt für die Bestimmung der variablen Außenradien  $r(\varphi_x)_{SMA}$  sowie die Höhe  $h(\varphi_x)_{KA}$  durchgeführt. Lediglich beim Laufwinkelintervall  $[\varphi_x]$  unterscheidet sich die Aus- von der Einlaufnut.

$$r(\varphi_x)_{SMA}^2 - 2 \cdot z_A \cdot \cos(\varphi_x) \cdot r(\varphi_x)_{SMA} + z_A^2 - r_A^2 = 0 \quad (A3.45)$$

$$\varphi_{\min} = 0 \leq \varphi_x \leq (\Phi - \Phi_2) = \varphi_{\max} \quad (A3.46)$$

$$h(\varphi_x)_{KA} = r_{aH} - r(\varphi_x)_{SMA} \quad (A3.47)$$

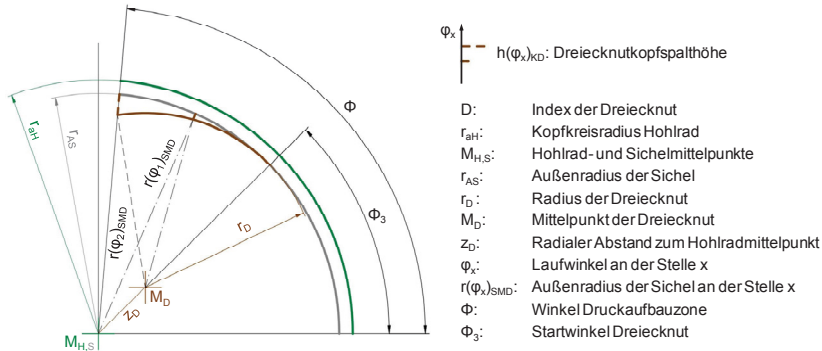
### Dreiecknutkopfspalthöhe $h_{KD}$ und -breite $a_{KD}$

Der Höhenverlauf der Dreiecknut verhält sich bis auf die Winkelgrenzen für  $\varphi_x$  wie bei der Auslaufnut. Mit den Gleichungen (A3.48) bis (A3.50) lässt sich die Dreiecknuthöhe  $h_{KD}$  ermitteln. Bild A3.11 zeigt die geometrischen Verhältnisse der Dreiecknut.

$$r(\varphi_x)_{SMD}^2 - 2 \cdot z_D \cdot \cos(\varphi_x) \cdot r(\varphi_x)_{SMD} + z_D^2 - r_D^2 = 0 \quad (A3.48)$$

$$\varphi_{\min} = 0 \leq \varphi_x \leq (\Phi - \Phi_3) = \varphi_{\max} \quad (A3.49)$$

$$h(\varphi_x)_{KD} = r_{AS} - r(\varphi_x)_{SMD} \quad (A3.50)$$

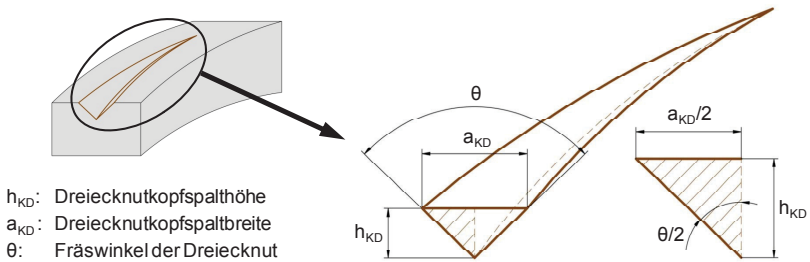


**Bild A3.11:** Dreiecknutgeometrie am Hohlrad

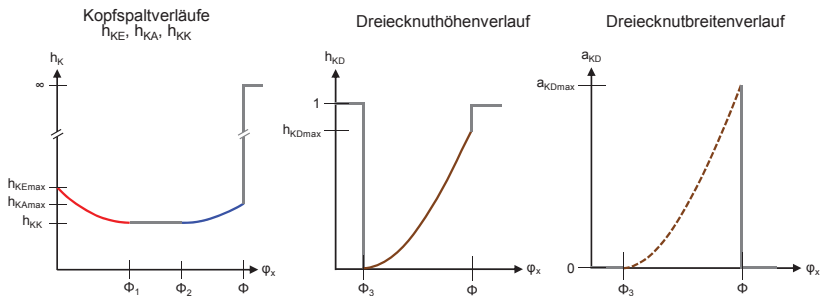
Die Grundlagen zur Berechnung der Dreiecknutbreite  $a_{KD}$  an jeder beliebigen Stelle  $\varphi_x$  sollen mit Hilfe von Bild A3.12 genauer erläutert werden. Die Dreiecknut im linken Teil der Abbildung, die in die Sichel eingefräst wird, ist rechts im Bild nochmals vergrößert dargestellt und mit allen notwendigen geometrischen Größen bemaßt. Die Breite ist sowohl von der Dreiecknuthöhe, als auch vom Fräswinkel  $\theta$  der Nut abhängig. Über den Satz des Pythagoras kann die mathematische Beziehung zur Bestimmung der Breitenfunktion  $a(\varphi_x)_{KD}$  am schraffierten halben Dreieck aufgestellt werden. Da die Breite  $a_{KD}$  von der Höhe  $h_{KD}$  abhängt und diese wiederum vom Laufwinkel  $\varphi_x$  abhängig ist, gilt derselbe Intervallbereich.

$$\varphi_{\min} = 0 \leq \varphi_x \leq (\Phi - \Phi_3) = \varphi_{\max} \quad (A3.51)$$

$$a(\varphi_x)_{KD} = 2 \cdot \tan(\theta/2) \cdot h(\varphi_x)_{KD} \quad (A3.52)$$

**Bild A3.12:** Profil der Dreiecksnut

In Bild A3.13 sind alle Kopfspaltmaßverläufe im Druckaufbaubereich in qualitativer Form aufgetragen.

**Bild A3.13:** Qualitative Kopfspaltverläufe im Druckaufbaubereich

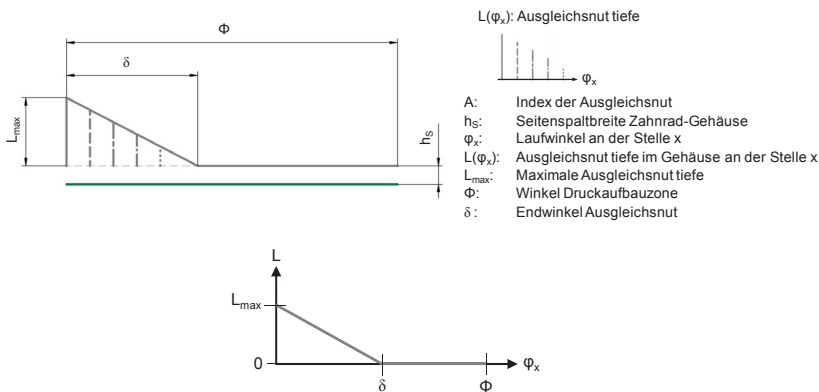
### Ausgleichsnutgeometrie

Wie bei der Kopfspaltgeometrie besteht auch bei der Ausgleichsnut eine Berechnungsanalogie zwischen Hohlrad und Ritzel. Aus diesem Grund kann eine explizite Betrachtung für das Ritzel ausgelassen werden. Die Herleitung der Ausgleichsnuttiefe  $L(\varphi_x)$  soll anhand von Bild A3.14 genauer erläutert werden. Die graue Linie entspricht der Außenkontur der Gehäusewand, die grüne Linie wiederum der äußeren Kante über der Breite des Hohlrads. Gleichung (A3.54) beschreibt die Funktion der Ausgleichsnut. Mit Hilfe der mathematischen linearen Funktion lässt sich die Gleichung der Axialnuttiefe definieren. Die Steigung  $m$  einer Geraden entspricht in diesem Falle dem Quotienten aus maximaler Axialnuttiefe  $L_{max}$  und dem Endwinkel der Ausgleichsnut  $\delta$  im Bogenmaß. Die unabhängige Variable  $x$ , also die Abszisse im mathematischen Sinne, entspricht dem Laufwinkel  $\varphi_x$ , wobei  $y$  die abhängige Variable ist und durch die Ausgleichsnuttiefe  $L(\varphi_x)$  an der gesuchten Stelle ersetzt wird.

Für die Berechnung ist das Intervall des Laufwinkels  $\varphi_x$  aus Gleichung (A3.53) notwendig.

$$\varphi_{\min} = 0 \leq \varphi_x \leq \delta = \varphi_{\max} \quad (\text{A3.53})$$

$$L(\varphi_x) = -\frac{L_{\max}}{\delta} \cdot \varphi_x + L_{\max} \quad (\text{A3.54})$$



**Bild A3.14:** Ausgleichsnut-Spaltgeometrie am Hohlrad mit qualitativem Ausgleichsnut-Spaltverlauf im Druckaufbaubereich



